Gabarito A

2ª Questão: (1,5 pontos) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Seja S uma superfície de nível de F e seja P um ponto de S. Sabe-se que:

i) a reta normal a S em P é paralela a $\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$;

ii) o maior valor da derivada direcional $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P)$ é 3 $\quad (\|\vec{u}\| = 1)$;

iii) Para $\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, temos $\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calcule $\nabla F(P)$.

Sabemos que $\nabla F(P)$ é normal ao plano tangente a S em P e portanto, por i), $\nabla F(P)$ é paralelo a $\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$, isto é, $\nabla F(P) = \lambda \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ para algum λ real $(*)$

Sabemos que o maior valor de $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P)$, quando $\|\vec{u}\| = 1$, é igual a $\|\nabla F(P)\|$ e portanto, por ii) e por $(*)$, temos $3 = \|\nabla F(P)\| = |\lambda| \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = |\lambda| \frac{3}{2}$.

Logo $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

Se $\lambda = -2$, então $\nabla F(P) = (-1, 2, 2)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) = \left\langle (-1, 2, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se $\lambda = 2$, então $\nabla F(P) = (1, -2, -2)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) = \left\langle (1, -2, -2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como queremos $\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, então $\lambda = -2$ e