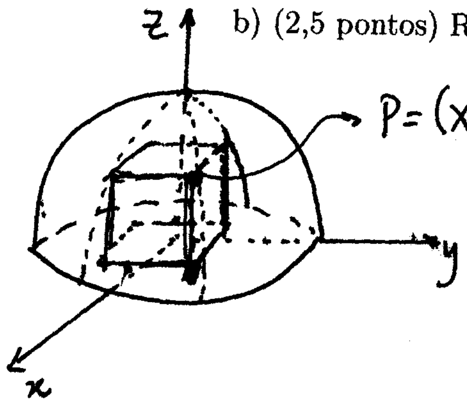
3ª Questão: Considere o seguinte problema:

"Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$".

a) (0,5 ponto) Mostre que o problema tem solução.

b) (2,5 pontos) Resolva o problema.



a) Por simetria, podemos considerar o problema no 1º octante. A intersecção do parabolóide com o 1º octante é
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ e ??
B é um conjunto fechado e limitado (compacto) de $\mathbb{R}^3$.
Queremos determinar $P = (x_0, y_0, z_0) \in B$ tal que o volume do paralelepípedo seja máximo, ou seja, queremos $P \in B$ que maximiza a função $V(x,y,z) = 4xyz$
Como B é fechado e limitado (compacto) e $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua, o teor. de Weiershass garante que V tem máximo e mínimo em B.

b) • Se $(x,y,z) \in B$ com $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, temos que $V(x,y,z) = 0$ e, portanto, (x,y,z) é um ponto de mínimo de V em B (repare que $V(x,y,z) \geq 0$ $\forall (x,y,z) \in B$).

* Procuramos, então, um ponto $(x,y,z) \in B$ com $x \neq 0, y \neq 0$ e $z \neq 0$ tal que $V(x,y,z)$ seja máximo.
Substituindo $z = 4 - x^2 - y^2$, temos $V = 4xy(4 - x^2 - y^2)$
$= 16xy - 4x^3 - 4xy^3$

Basta analisar os pontos críticos de
$F(x,y) = 4xy - x^3y - xy^3$ em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y >$ e $x^2 + y^2 < 4\} =$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x(4 - 3y^2 - x^2) = 0$

As soluções deste sistema são $(0, \pm 2), (\pm 2, 0), (0,0), \pm(1,1)$ e $\pm(-1,1)$. No conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ considerado, só temos $(x,y) = (1,1)$