4. (2,5) (a) Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e tal que $f(3t,t^3) = \ln t$, para todo $t>0$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -\frac{2}{3}$.

(b) Seja $g(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^2y$. Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva derivável cuja imagem está contida na intersecção do gráfico de g com o gráfico da função f do item (a). Ache a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $(3,1,g(3,1))$.

a) $f(3t, t^3) = \ln t,\ t>0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(3t,t^3)3 + \frac{\partial f}{\partial y}(3t,t^3)3t^2 = \frac{1}{t},\ t>0$

$(t=1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3,1).3 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1).3 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 1.}$ //

b) $g(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^2y$

$g(3,1) = 9 - 27 + 12 = 0$

$\nabla g(x,y) = (2xy^3 - 3x^2y^2 + 4xy,\ 3x^2y^2 - 2x^3y + 2x^2)$

$\nabla g(3,1) = (6 - 27 + 12,\ 27 - 54 + 18) = (-9,-9)$

$\nabla f(3,1) = (1, -\frac{2}{3})$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ -9 & -9 & -1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{25}{3}, +10, -15\right) = \frac{5}{3}(-5,6,-9)$$

$\boxed{X = (3,1,0) + \lambda(-5,6,-9),\ \lambda \in \mathbb{R}}$ //