4. (2,5) (a) Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e tal que $f(t^3, 3t) = \ln t$, para todo $t > 0$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)$, sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -\frac{2}{3}$.

(b) Seja $g(x,y) = x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^2$. Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva derivável cuja imagem de está contida na intersecção do gráfico de $g$ com o gráfico da função $f$ do item (a). Ache a equação da reta tangente à imagem de $\gamma$ no ponto $(1, 3, g(1,3))$.

a) $f(t^3, 3t) = \ln t, \ t>0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t^3,3t)\,3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^3,3t).3 = \frac{1}{t}, \ t>0$

$(t=1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,3).3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3).3 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 1}$

b) $g(x,y) = x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^2$

$g(1,3) = 9 - 27 + 18 = 0$

$\nabla g(x,y) = (3x^2y^2 - 2xy^3 + 2y^2,\ 2x^3y - 3x^2y^2 + 4xy)$

$\nabla g(1,3) = (27 - 54 + 18,\ 6 - 27 + 12) = (-9,-9)$

$\nabla f(1,3) = (1, -\frac{2}{3})$.

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2/3 & -1 \\ -9 & -9 & -1 \end{vmatrix} = (-\frac{25}{3}, +10, -15) = \frac{5}{3}(-5, 6, -9)$

$$\boxed{X = (1,3,0) + \lambda(-5,6,-9),\ \lambda \in \mathbb{R}}$$