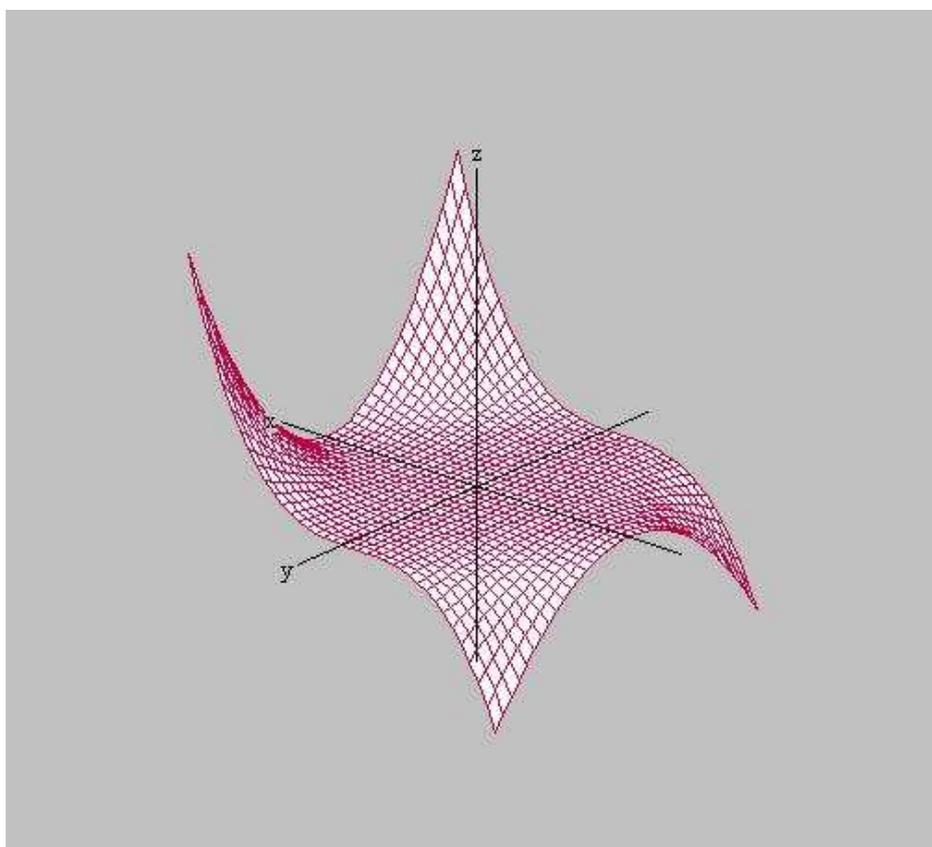


MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2006

Exercício 28 da Lista 3

A função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ tem um **único** ponto crítico que é o ponto $(0, 0)$. De fato, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 15y^2(1 + x)^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10y(1 + x)^3$. Para que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ temos que ter $y = 0$ ou $x = -1$. Se $x = -1$ então $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, y) = -2 \neq 0$ para todo y . Se $y = 0$ então $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x = 0$, implica que $x = 0$. Assim $(0, 0)$ é o **único** ponto crítico de f . Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 30y^2(1 + x)$, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$. O hessiano $H(0, 0) = 2 \cdot 10 - 0 \cdot 0 = 20 > 0$. Assim, $(0, 0)$ é um ponto de **mínimo local** de f . Observe que $(0, 0)$ **não** é ponto de mínimo **global** de f , pois $f(0, 0) = 0$ mas, por exemplo, $f(-2, 2) = 4 + 20(-1) = -16 < 0 = f(0, 0)$. Veja o gráfico de f .



Para um outro exemplo dessa situação veja o site:

<http://www.math.tamu.edu/~tom.vogel/gallery/node16.html>

Note que no nosso exemplo a função é um polinômio (de grau 5), e no exemplo acima, não é.

Prove agora o seguinte resultado:

Se $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Ex + Fy + K$ é um polinômio de **grau 2** que tem um **único** ponto crítico que é um ponto de **máximo local** (**mínimo local**) então este ponto é um ponto de **máximo global** (**mínimo global**) de f .

Como é o gráfico de uma tal função? **Veja o Exercício 46(a)**.