

MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral I - POLI

1o. Semestre de 2015 - 3a. Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

$$1. \int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$2. \int e^{2x} dx$$

$$3. \int \cos 7x dx$$

$$4. \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$5. \int \frac{7}{x-2} dx$$

$$6. \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$$

$$7. \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx$$

$$9. \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$10. \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$11. \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$12. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$13. \int x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$14. \int \sec x dx$$

$$15. \int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$$

$$16. \int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$$

$$17. \int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$$

$$18. \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$19. \int \frac{dx}{(\arcsen x) \sqrt{1-x^2}}$$

$$20. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$21. \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$22. \int e^{x^3} x^2 dx$$

$$23. \int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$$

$$24. \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$25. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$$

$$26. \int 2x(x+1)^{2015} dx$$

$$27. \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$28. \int e^x \cos x dx$$

$$29. \int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$$

$$30. \int (\ln x)^2 dx$$

$$31. \int x e^{-x} dx$$

$$32. \int x \operatorname{arctg} x dx$$

$$33. \int \arcsen x dx$$

$$34. \int \sec^3 x dx$$

$$35. \int \cos^2 x dx$$

$$36. \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$$

$$37. \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$$

$$38. \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$39. \int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$40. \int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$$

$$41. \int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$$

$$42. \int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$$

$$43. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$44. \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$45. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$46. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$47. \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$$

$$48. \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$49. \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$$

$$50. \int \frac{x}{x^2-4} dx$$

$$51. \int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$$

$$52. \int \sqrt{a^2+b^2x^2} dx$$

$$53. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$54. \int \sqrt{x^2-2x+2} dx$$

$$55. \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

$$56. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$57. \int \cos^3 x dx$$

$$58. \int \operatorname{sen}^5 x dx$$

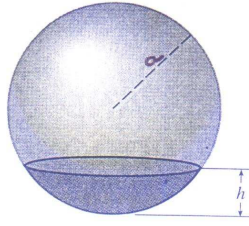
$$59. \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$$

$$60. \int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

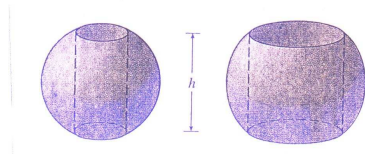
$$\begin{array}{lll}
61. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} & 62. \int \sin^4 x \, dx & 63. \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx \\
64. \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx & 65. \int \cos^6(3x) \, dx & 66. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} \, dx \\
67. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} & 68. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx & 69. \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \\
& & \text{(Sugestão: faça } u = \sqrt[6]{x}\text{)} \\
70. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} \, dx & 71. \int \frac{\arctg x}{x^2} \, dx & 72. \int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx \\
73. \int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} \, dx & 74. \int \frac{dx}{1+e^x} & 75. \int \frac{\ln(x+1)}{x^2} \, dx \\
76. \int x^5 e^{-x^3} \, dx & 77. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} \, dx & 78. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} \, dx
\end{array}$$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \sin(x^2 + 1) \, dx$.
2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h .
3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.
4. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
5. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$.
6. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
 - a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.
 - b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$.
 - d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$.
8. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.
9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.
10. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h , $h \leq a$, de uma esfera de raio a .



11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.
12. Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \frac{18}{9 + x^2}$ e $g(x) = \frac{x}{3}$ para $x \in [0, 3]$.
 - (a) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox .
 - (b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy .
13. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.
14. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , prove o fato notável de que o volume do anel depende de h , mas não de R .



III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a, b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

2. Calcule $g'(x)$ onde

$$(a) g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt \quad (b) g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2) dt$$

3. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3} dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x) dx$ em termos de $F(2)$.

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x - t) f(t) dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\int_0^x e^{-t^2} dt}$.
6. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?
7. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
8. Seja $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1} dt$.
- (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x - 2)}$

IV - Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

(a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que: a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

- b) Avalie $\operatorname{sen}(1)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

- b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5} .

- c) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) \right| \leq \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

- d) Avalie $\int_0^1 e^{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-5} .

6. Mostre que $\left| \int_0^1 \cos(x^2) dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!} \right) \right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até 2ª ordem em I . Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o “teste da segunda derivada”, isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e

- a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a .

- b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a .

V - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\sen x \cos x}{x+1} dx$ em termos de $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$.

3. **Trabalho.** Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d , definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se deslocando na direção positiva ao longo do eixo x , entre $x = a$ e $x = b$, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Explique porque, nesse caso, é razoável definir o trabalho como $\int_a^b F(x)dx$.

4. **Energia cinética.** Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2 . Em Física, a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v . Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

5. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\vec{i}$, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v , segundo a função $m : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} (m(x'(t))x'(t)) = f(x(t)).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE , e se $\Delta m = m(x'(t_1)) - m(x'(t_0))$, então:

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

6. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$
7. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.
8. Seja $G(x) = \int_0^x \left(t \int_0^t e^{u^2} du \right) dt$. Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.
9. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
10. Calcule o comprimento do arco da curva $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{x}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right)$ no intervalo fechado $[c_0, c_1] \subset]0, a[$ (suponha $a > 0$).
11. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Mostre que f é crescente e ímpar.
 - (b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x .)
 - (c) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.
 - (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.
12. Estude as seguintes integrais de Riemann impróprias:

(a) $\int_0^1 \ln(x) dx$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$ | 2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$ |
| 3) $\frac{1}{7} \operatorname{sen} 7x + k$ | 4) $\operatorname{tg} x - x + k$ |
| 5) $7 \ln x - 2 + k$ | 6) $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + k$ |
| 7) $2\sqrt{\cos x} \left(\frac{1}{5} \cos^2 x - 1 \right) + k$ | 8) $-\ln \cos x + k$ |
| 9) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x + k$ | 10) $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$ |
| 11) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$ | 12) $x - \operatorname{arctg} x + k$ |
| 13) $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + k$ | 14) $\ln \sec x + \operatorname{tg} x + k$ |
| 15) $2\sqrt{1 + \ln x} + k$ | 16) $\frac{5}{18} \sqrt{(x^3 + 1)^6} + k$ |
| 17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$ | 18) $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + k$ |
| 19) $\ln \operatorname{arcsen} x + k$ | 20) $\ln(1 + e^x) + k$ |
| 21) $-\ln(1 + \cos^2 x) + k$ | 22) $\frac{1}{3} e^{x^3} + k$ |
| 23) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + e^x)^4} + k$ | 24) $-2 \cos \sqrt{x} + k$ |
| 25) $e^{\operatorname{arctg} x} + k$ | 26) $2(x+1)^{2016} \left(\frac{x+1}{2017} - \frac{1}{2016} \right) + k$ |
| 27) $-x \cos x + \operatorname{sen} x + k$ | 28) $\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + k$ |
| 29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2} (\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$ | 30) $x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + k$ |
| 31) $(-x - 1)e^{-x} + k$ | 32) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + k$ |
| 33) $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$ | 34) $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln \sec x + \operatorname{tg} x + k$ |
| 35) $\frac{1}{2} (x + \operatorname{sen} x \cos x) + k$ | 36) $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + k$ |
| 37) $\frac{1}{8} (x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x) + k$ | 38) $\ln 1 + \operatorname{sen} x + k$ |
| 39) $6 \ln x - 1 - 25 \ln x - 2 + 22 \ln x - 3 + k$ | 40) $\frac{\sqrt{6}}{12} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+2}{\sqrt{6}} \right) + k$ |
| 41) $-22 \ln x - 1 + \frac{12}{x-1} + 25 \ln x - 2 + k$ | 42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln x - 2 + \frac{61}{24} \ln(1 + (\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) + k$ |
| 43) $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + k$ | 44) $\frac{x}{8} (2x^2 - 1) \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8} \operatorname{arcsen} x + k$ |
| 45) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + k$ | 46) $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + k$ |
| 47) $\ln \sqrt{5 - 2x + x^2} + x - 1 + k$ | 48) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} (\ln x - \frac{2}{3}) + k$ |

- 49) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$
 51) $2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$
 53) $\frac{1}{b} \ln\left(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{a}\right) + k$
 55) $\frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$
 57) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + k$
 59) $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} - 2 \ln|\operatorname{sen} x| + k$
 61) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x} + k$
 63) $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5} \operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x + k$
 65) $\frac{5}{16} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64} \operatorname{sen}(12x) - \frac{1}{144} \operatorname{sen}^3(6x) + k$
 67) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{cotg}(2x) + k$
 69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$
 71) $\frac{-\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$
 73) $2 \ln|x+1| + \ln(x^2 - 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x-1) + k$
 75) $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln(x+1) + k$
 77) $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + k$
 50) $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 4| + k$
 52) $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{a^2}{2b} \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}) + k$
 54) $\frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + k$
 56) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$
 58) $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + k$
 60) $\frac{1}{4} \cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + k$
 62) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + k$
 64) $\frac{x}{16} - \frac{1}{64} \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3(2x) + k$
 66) $-\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{cotg}^5 x + k$
 68) $\arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k$
 70) $\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{32} \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{64} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{4-x}{32(x^2+4)} + k$
 72) $\frac{3}{2} \arcsen(x-1) - \left(\frac{x+3}{2}\right) \sqrt{2x-x^2} + k$
 74) $x - \ln(1 + e^x) + k$
 76) $-\frac{1}{3}(x^3 + 1)e^{-x^3} + k$
 78) $\frac{1}{6} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + k$

II - Aplicações da Integral Definida

1. 0.
 2. $\frac{1}{3} L^2 h$.
 3. $\frac{128}{105} a^3$.
 4. $\ln(1 + \sqrt{2})$.
 5. $\frac{24}{5} \sqrt{3}$.
 6. πab .
 7. (a) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3} \pi$.
 (b) $\frac{\pi}{6}$.
 (c) $\frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2})^2$.
 (d) $\frac{5\pi}{6}$.
 8. $\pi \left[\int_0^1 (e^x + 2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1) dx \right]$
 9. $\frac{32}{3} \pi$.
 10. $\pi h^2 (a - \frac{h}{3})$.
 11. $(2\pi b)(\pi a^2)$.
 12. (a) $\frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi$.
 (b) $6\pi(3 \ln 2 - 1)$.
 13. $\operatorname{senh} 4 + \operatorname{senh} 3$.

III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

3. $2F(2) - \frac{26}{9}$.
 4. 0.
 6. $\frac{\pi}{2}$.

V - Miscelânea

2. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A \right)$.
 7. $\frac{16}{3} R^3$.
 8. $G'(x) = x \int_0^x e^{u^2} du$,
 $G''(x) = \int_0^x e^{u^2} du + xe^{x^2}$.
 9. $6a$.
 10. $a \ln\left(\frac{c_1}{c_0}\right)$.
 12. (a) -1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 1