MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral I

1º Semestre de 2015 - 2ª Lista de Exercícios

1. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$

   (d) $f(x) = x^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^x$ (e) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x^2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

   (g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

   (j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

   (m) $f(x) = (\mathrm{e}^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + \mathrm{e}^{\cos x}}$

   (p) $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (r) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$

   OBSERVAÇÃO. As funções (a) e (b) são chamadas, respectivamente, de cosseno hiperbólico e de seno hiperbólico e são denotadas, respectivamente por cosh e senh. Verifique que

   $$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1, \quad \cosh'(x) = \operatorname{senh}(x), \quad \operatorname{senh}'(x) = \cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

2. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \le |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \le \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \le |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

   (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \le a < b$.

   (e) $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \le \frac{b-a}{a^2}$, para $1 \le a < b \le \mathrm{e}$.

3. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f. Calcule $g'(x)$, $g''(x)$ em termos de $g(x)$. Calcule $g''(0)$.

4. Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$.

5. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ com $0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $(x, f(x))$ é solução da equação $y^5 + y\mathrm{e}^x + 3x\mathrm{e}^{y+1} + 2 = 7 \operatorname{sen} x$, para todo $x \in I$. Seja g a inversa de f. Supondo que f e g são funções deriváveis, determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1.

6. Seja $h(x) = 2x + \cos x$. Mostre que h é bijetora e, admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

7. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja g a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

   $$g(b) - g(a) \le \frac{1}{2}(b - a).$$

8. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$ tal que $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \le 1$, para todo $x > 0$. Mostre que $0 < f(x) \le x$, para todos $x > 0$.

9. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$. Conclua que

$$(1+\pi)^{\mathrm{e}} < (1+\mathrm{e})^{\pi}.$$

10. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$ (b) $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\ b}{\operatorname{tg}\ a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ (d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, para $x > 0$ (f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$

11. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto crítico de g. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

12. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg}\ x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x$, $p > 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}\ x + 2x^2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}}$ (t) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{6x+1}{6x-1}\right)^x$ (w) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right)$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

13. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três soluções reais distintas ?

14. Prove que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$.

15. Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + \mathrm{e}x + 1$. Quantas soluções distintas tem a equação $f''(x) = 0$? Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

16. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

17. Prove que se p é um polinômio, a equação $\mathrm{e}^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

18. Suponha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, $f(0) = 1$ e $f(x)$ um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

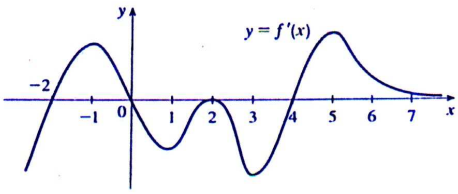
19. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

21. Determine todos os números positivos a tais que a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$.

22. Determine, caso exista, a constante a para que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha:
(a) um ponto de mínimo local em $x = 2$.
(b) um ponto de mínimo local em $x = -3$.
Mostre ainda que, para qualquer valor de a, a função f não terá um ponto de máximo local.

23. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?
(d) Ache os pontos de inflexão de f.
(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

24. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
(b) $f(x) = 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$
(c) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-8}{x+2}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
(e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
(h) $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$
(i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$
(j) $f(x) = x^2 \ln x$
(k) $f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$
(l) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$
(m) $f(x) = \dfrac{8\ln(x+3)}{(x+3)^2}$
(n) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$
(o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(p) $f(x) = e^x - e^{3x}$
(q) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
(r) $f(x) = x^x$

25. Seja $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$. Prove que f tem exatamente um ponto de inflexão e que esse ponto pertence ao intervalo $]-3,-2[$. Esboce o gráfico de f.

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(c) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

(e) Se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

27. Seja $f(x) = (x+6)e^{1/x}$. Para quais valores de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais?

28. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

    (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

29. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

    (b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

30. Achar os valores mínimo e máximo de:

    (a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$

    (b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

    (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$

    (e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$

31. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5},\ x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a para o qual tem-se $f(x) \geq 28$, para todo $x > 0$.

32. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo $x > 0$?

33. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

34. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

35. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

36. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

37. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

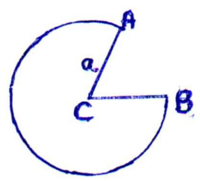
38. Sejam r e s duas retas paralelas com a distância entre elas igual a 2. Fixe um ponto C sobre a reta s. Fixe dois pontos A e B sobre a reta r de modo que a distância entre os pontos A e B seja igual a 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte o segmento AC em um ponto P de forma que a soma das áreas dos triângulos ABP e DCP seja mínima? E seja máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, determine a altura h do triângulo ABP.

39. Sejam $a, b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a.

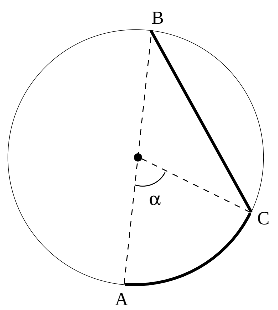
40. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

41. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

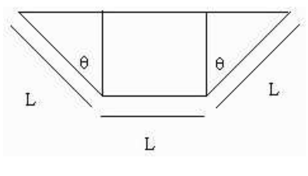
42. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



43. Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de $10m$ de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja figura abaixo). Seja α o ângulo AOC. Sabendo que ela pode caminhar duas vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Observação: considere que a pessoa pode somente caminhar ou somente nadar).



44. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade.



45. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

46. Seja k um número real. Prove que todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ são da forma ce^{kx}, com $c \in \mathbb{R}$.

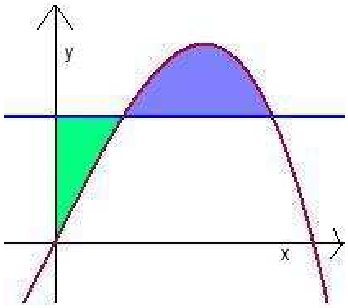
47. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = 1 - \frac{x^2}{5}$ e as retas $x = 0$ e $x = 3$.

48. Esboce a região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$ e calcule a sua área.

49. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

50. Calcule área da região plana delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$.

51. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



52. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})\, dx$, interpretando-a como uma área.

Exercícios Complementares

53. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

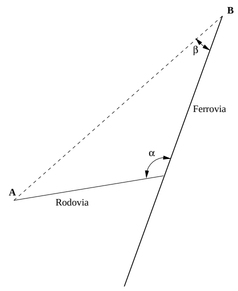
$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

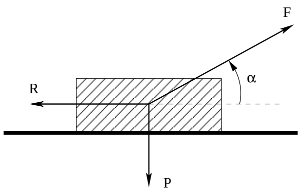
54. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

55. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável.
(a) Mostre que se $a, b \in I$, com $a \leq b$, então para todo y entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f'(x) = y$. (Observe que não supomos f de classe $\mathcal{C}^1$, o que tornaria o exercício trivial).
(b) Conclua que não existe função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável, tal que $f'(0) = 1$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.
(c) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável em todo ponto, tal que f' não seja contínua.

56. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.



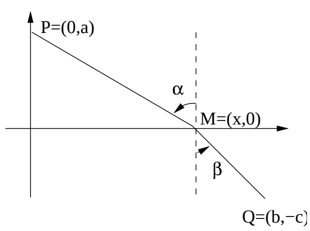
57. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



OBSERVAÇÃO. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F \cos \alpha - \mu(P - F \operatorname{sen} \alpha) \geq 0$, ou seja, $F \geq \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}$.

58. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{u} = \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{v}$.



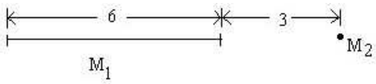
OBSERVAÇÃO. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

59. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

60. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



Respostas

3. $g''(0) = -\frac{3}{256}$ 4. $g'(1) = \frac{1}{4}$ 5. $5y = 6x + 6$ 6. $\frac{1}{2}$

12.
(a) 0 (b) 0 (c) 1 (d) 0 (e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 1 (i) 1 (j) e^4 (k) $\frac{1}{6}$ (l) $+\infty$
(m) 1 (n) $-\frac{1}{2}$ (o) 3 (p) e^{15} (q) e^2 (r) e (s) $e^{\frac{3}{2}}$ (t) 1 (u) $e^{\frac{2}{\pi}}$ (v) $\sqrt[3]{e}$ (w) 1 (x) $\frac{2}{3}$

13. $4 < k < 5$ 21. $a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 22. (a) $a = 16$; (b) $a = -54$ 26. Verdadeiras: (b) e (d)

27. $0 < k < 4e^{-1/2}$ ou $k > 9\sqrt[3]{e}$ 28. (a) 1

29. Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

30. (a) -1; $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$ (c) $1; \frac{1}{4} + \ln 4$ (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) $0; 27$

31. $a = 2^8$ 32. $a = 2$ 33. (a) 1; (b) $\frac{4}{\pi}$ 34. altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi + 12}}$ 37. $\frac{\pi}{4}$ 38. soma mínima: $h = \sqrt{2}$; a soma nunca é máxima.

39. $b + \sqrt{b^2 + 4a^2}$ 40. $(5, 0)$ e $(-5, 0)$

41.(a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9 + 4\sqrt{3}}$.

42. $\sqrt{2}$ 43. menor tempo $\alpha = \pi$; maior tempo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 44. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 45. $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$

47. $\text{arctg}3 - 2\text{arctg}2 + \frac{26}{15}$ 48. $\frac{107}{24}$ 49. $m = 2$ 50. $\frac{27}{4}$ 51. $c = \frac{4}{9}$ 52. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

53. $\frac{16a}{9}$ 56. $\pi - \max\{\beta, \arccos(\frac{1}{m})\}$ 57. $\text{arctg}\mu$ 59. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ 60. $\dfrac{4}{3}C$