2. (a) (1,0) Para cada $t > 1$ seja $A(t)$ a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ no intervalo $[t, 2t]$. Para qual $t > 1$ a área $A(t)$ é mínima? (**Dica:** Não tente usar técnicas de primitivação para encontrar uma primitiva de $\dfrac{1}{\ln x}$.)

Resolução: Para $t > 1$, $A(t) = \int_t^{2t} \frac{1}{\ln(x)} dx$. Segue pela Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo que $A'(t) = \frac{2}{\ln(2t)} - \frac{1}{\ln(t)} = \frac{2\ln(t) - \ln(2t)}{\ln(2t) \cdot \ln(t)}$. Assim, $A'(t) = 0$ se, e somente se, $2\ln(t) - \ln(2t) = 0$ se, e somente se, $t = 2$. Além disso, $A'(t) < 0$ se $1 < t < 2$ e $A'(t) > 0$ se $t > 2$. Portanto, $A(t)$ é mínima para $t = 2$.

(b) (1,5) Seja

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} \right\}.$$

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Resolução: Como as seções transversais do sólido são círculos de raio $\frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$, temos que o volume do sólido é

$$\int_1^2 \pi \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x+3)} dx = \pi \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} dx.$$

Fazendo a divisão de polinômios, obtemos que

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} = 1 - \frac{3x+5}{x^2+5x+6} = 1 - \frac{3x+5}{(x+2)(x+3)}.$$

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{3x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}.$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A + 2B = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $A = -1$ e $B = 4$. Logo,

$$\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{-1}{x+2} dx - \int_1^2 \frac{4}{x+3} dx.$$

Como

$$\int dx = x, \quad \int \frac{-1}{x+2} = -\ln|x+2| \quad \text{e} \quad \int \frac{4}{x+3} dx = 4\ln|x+3|,$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x+3)}dx &= (2-1)+(\ln(4)-\ln(3))-4(\ln(5)-\ln(4)) \\ &= 1+5\ln(4)-\ln(3)-4\ln(5) = 1+\ln(1024/1875)\end{aligned}$$

e o volume do sólido é

$$\pi(1+5\ln(4)-\ln(3)-4\ln(5)) = \pi(1+\ln(1024/1875)).$$