

1. (2,5) Considere  $f(x) = \ln(1 + x^2) + 2\operatorname{arctg}(1/x)$ . Para cada  $k \in \mathbb{R}$ , determine o número de soluções da equação  $f(x) = k$ .

*Resolução:* Note que  $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Além disso, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1 + x^2) + 2\operatorname{arctg}(1/x)) = \pi,$$

já que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}(1/x) = \frac{\pi}{2},$$

usando a continuidade das funções envolvidas.

De modo análogo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(1 + x^2) + 2\operatorname{arctg}(1/x)) = -\pi,$$

uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1 + x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg}(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + x^2) + 2\operatorname{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

já que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(1/x) = 0,$$

pela continuidade de cada uma das funções envolvidas.

De modo análogo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + x^2) + 2\operatorname{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

uma vez que

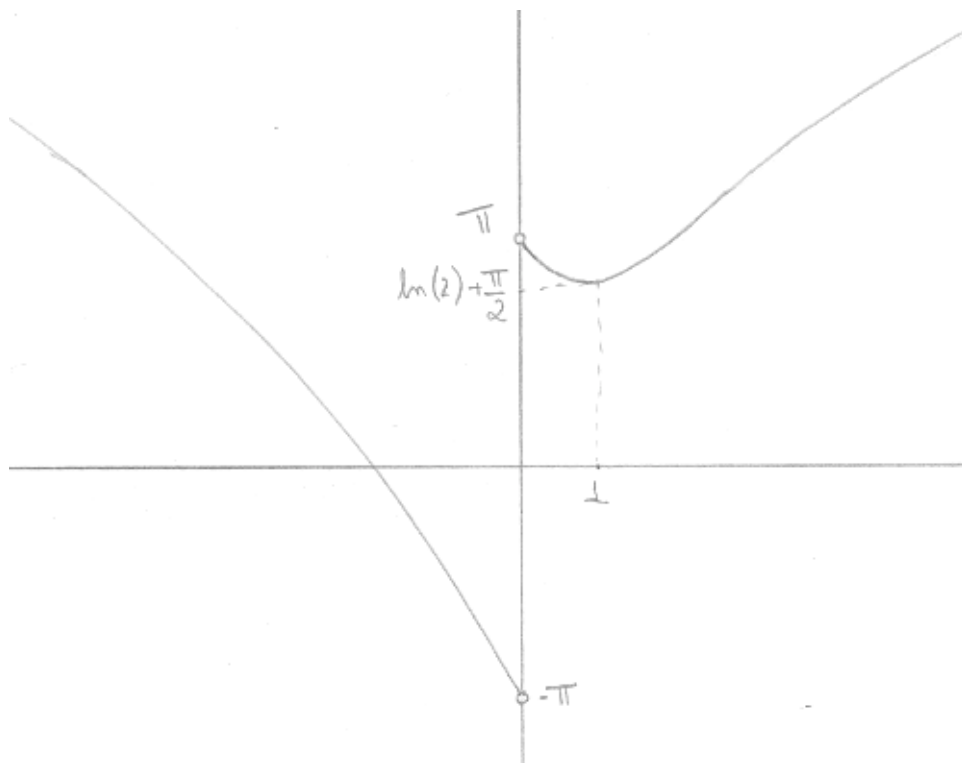
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(1/x) = 0.$$

Além disso,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \left(\frac{2}{1+(\frac{1}{x})^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x-2}{1+x^2}.$$

Logo,  $f'(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 1$ ,  $f'(x) < 0$  se  $x < 1$  e  $f'(x) > 0$  se  $x > 1$ . Daí,  $f$  é estritamente decrescente nos intervalos  $] -\infty, 0[$  e  $]0, 1[$  e é estritamente crescente no intervalo  $]1, +\infty[$ . Portanto,  $f(1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .

Obtemos assim um esboço do gráfico de  $f$ :



Concluimos então que  $f(x) = k$ :

- não tem soluções reais para  $k \leq -\pi$ ,
- tem uma única solução real para  $-\pi < k < \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ ,
- tem duas soluções reais para  $k = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$  ou  $k \geq \pi$ ,
- tem três soluções reais para  $\ln(2) + \frac{\pi}{2} < k < \pi$ .