1. (2,5) Considere $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, determine o número de soluções da equação $f(x) = k$.

   Resolução: Note que *dom* $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Além disso, temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = -\pi,$$

   já que

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \text{arctg}(1/x) = \frac{\pi}{2},$$

   usando a continuidade das funções envolvidas.

   De modo análogo,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = \pi,$$

   uma vez que

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \text{arctg}(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$

   Por outro lado,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   já que

$$\lim_{x\to +\infty}(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \text{arctg}(1/x) = 0,$$

   pela continuidade de cada uma das funções envolvidas.

   De modo análogo,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   uma vez que

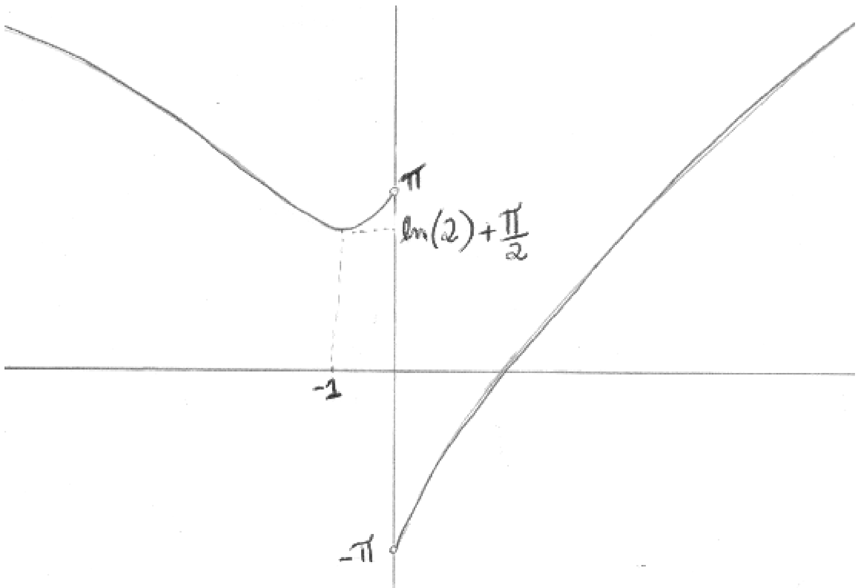
$$\lim_{x\to -\infty}(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \text{arctg}(1/x) = 0.$$

Além disso,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - (\frac{2}{1+(\frac{1}{x})^2})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2x+2}{1+x^2}.$$

Logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -1$, $f'(x) < 0$ se $x < -1$ e $f'(x) > 0$ se $x > -1$. Daí, f é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, -1[$ e é estritamente crescente nos intervalos $]-1, 0[$ e $]0, \infty[$. Portanto, $f(-1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Obtemos assim um esboço do gráfico de f:



Concluímos então que $f(x) = k$:

- não tem soluções reais para $k \leq -\pi$,
- tem uma única solução real para $-\pi < k < \ln(2) + \frac{\pi}{2}$,
- tem duas soluções reais para $k = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ ou $k \geq \pi$,
- tem três soluções reais para $\ln(2) + \frac{\pi}{2} < k < \pi$.