**Questão 3.** (3,0 pontos) Considere $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^x \sqrt{9e^{2t}-1}\,dt$ e $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} x^2 e^{t^2}\,dt$.

a) Calcule $g'(x)$.

b) Seja $F(x) = f(g(x))$. Calcule $F'(\pi)$.

c) Calcule o comprimento do gráfico de $f$ entre $x=0$ e $x=1$.

a) $g(x) = x^2 \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt$.

Observe que a função $x \mapsto e^{x^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, as funções envolvidas são deriváveis.

Usando as regras do produto e da cadeia e o TFC, obtemos, para $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{g'(x) = 2x\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt + x^2 e^{\operatorname{sen}^2 x}\cos x}$$

b) A função $x \mapsto \sqrt{9e^{2x}-1}$ é contínua em $[\ln\frac{1}{3}, +\infty[$

Pelo TFC, $f'(x) = \sqrt{9e^{2x}-1}$, $\forall x > \ln\frac{1}{3}$, em particular, p/ $x \geq 0$.

$g(\pi) = \pi^2\int_0^0 e^{t^2}dt = 0$ e $g'(\pi) = 2\pi\int_0^0 e^{t^2}dt + \pi^2 e^0(-1) = -\pi^2$

$f$ é derivável em $0 = g(\pi)$ e $g$ é derivável em $\pi$.

Pela RC, $F(x) = f(g(x))$ é derivável em $\pi$ e $F'(\pi) = f'(g(\pi))g'(\pi)$, isto é,

$$F'(\pi) = f'(0)(-\pi^2) = \boxed{-\sqrt{8}\,\pi^2}$$

c) $f'(x) = \sqrt{9e^{2x}-1}$ é contínua em $[0,1]$.

Logo,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{9e^{2x}}\,dx = 3\int_0^1 e^x\,dx = \boxed{3(e-1)}$$