

Questão 3. (3,0 pontos) Considere $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^x \sqrt{4e^{2t} - 1} dt$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_0^{\sin x} x^3 e^{t^2} dt$.

a) Calcule $g'(x)$.

b) Seja $F(x) = f(g(x))$. Calcule $F'(\pi)$.

c) Calcule o comprimento do gráfico de f entre $x = 0$ e $x = 1$.

$$a) g(x) = x^3 \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$$

A função $x \mapsto e^{x^2}$ é contínua em \mathbb{R} . Logo, as funções envolvidas na g são deriváveis. Usando as regras do produto e da cadeia e o TFC, obtemos

$$g'(x) = 3x^2 \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt + x^3 e^{\sin^2 x} \cos x \quad \Big| \quad \text{p/ todo } x \in \mathbb{R}$$

b) A função $x \mapsto \sqrt{4e^{2x} - 1}$ é contínua em $[\ln \frac{1}{2}, +\infty[$.

Pelo TFC, $f'(x) = \sqrt{4e^{2x} - 1}$, $\forall x > \ln \frac{1}{2}$, em particular, para $x \geq 0$.

$$g(\pi) = \pi^3 \int_0^0 e^{t^2} dt = 0 \quad \text{e} \quad g'(\pi) = 3\pi^2 \int_0^0 e^{t^2} dt + \pi^3 e^0 (-1) = -\pi^2$$

f é derivável em $0 = g(\pi)$ e g é derivável em π .

Pela RC, $F(x) = f(g(x))$ é derivável em π e $F'(\pi) = f'(g(\pi))g'(\pi)$, isto é,

$$F'(\pi) = f'(0)(-\pi^2) = \underline{-\sqrt{3}\pi^2}$$

c) $f'(x) = \sqrt{4e^{2x} - 1}$ é contínua em $[0, 1]$

Logo,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{4e^{2x}} dx = 2 \int_0^1 e^x dx = \underline{2(e-1)}$$