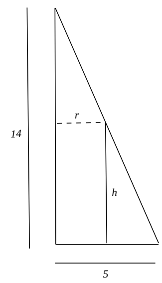
4) (2,0) Considere um cone circular reto de altura 14 cm e raio 5 cm. Dentre os cilindros circulares retos que podem ser inscritos nesse cone (conforme figura abaixo), determine a altura h do cilindro que tem volume máximo.



Considerando os triângulos semelhantes na figura acima temos:

$$\frac{h}{14} = \frac{5-r}{5} \quad \text{ou seja,} \quad h = 14 - \frac{14}{5}r$$

O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$.

Escrevendo h em função de r, temos a função $V : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$V(r) = \pi r^2 (14 - \frac{14}{5}r) = 14\pi (r^2 - \frac{r^3}{5}).$$

E sua derivada é dada por: $V'(r) = 14\pi r(2 - \frac{3r}{5})$.

Temos que $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = \frac{10}{3}$. (obs.: se $r = 0$ então $V = 0$)

Fazendo o estudo do sinal de V' temos:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \nearrow & & \searrow & & V \\
\hline
| & + & | & - & | & V' \\
\hline
0 & & \frac{10}{3} & & 5 &
\end{array}$$

Portanto, $r = \frac{10}{3}$ é o ponto de máximo de V então, para que o volume seja máximo, temos que ter $h = \frac{14}{3} cm$.