Questão 2

(a) (1,5) Prove que para todos $a, b \in]0, +\infty[$ com $0 < a < b$ tem-se:

$$\frac{\text{arctg}(3b)}{\text{arctg}(3a)} < \frac{b}{a}$$

Resolução: Dados $0 < a < b$, primeiramente observe que como $b > 0$ e $\text{arctg}(3a) > 0$ (já que $a > 0$), então a desigualdade

$$\frac{\text{arctg}(3b)}{\text{arctg}(3a)} < \frac{b}{a}$$

equivale à desigualdade

$$\frac{\text{arctg}(3b)}{b} < \frac{\text{arctg}(3a)}{a}.$$

Considere a função $f(x) = \frac{\text{arctg}(3x)}{x}$ definida no intervalo $]0, +\infty[$ e provemos que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$.

Temos que f é derivável em todos os pontos de seu domínio e

$$f'(x) = \left(\frac{3x}{1+9x^2} - \text{arctg}(3x)\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{3x - (1+9x^2)\text{arctg}(3x)}{(1+9x^2)x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ e $1 + 9x^2 > 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, o sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal de $g(x) = 3x - (1+9x^2)\text{arctg}(3x)$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Note que g está definida em $\mathbb{R}$ e g é contínua e derivável em todos os pontos de seu domínio. Além disso, $g(0) = 0$ e

$$g'(x) = 3 - 18x \cdot \text{arctg}(3x) - (1+9x^2) \cdot \frac{3}{1+9x^2} = -18x \cdot \text{arctg}(3x).$$

Logo, $g'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, donde concluímos que g é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$. Portanto, g é estritamente negativa em $]0, +\infty[$ e, então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Segue que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$, como queríamos.

(b) (1,0) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0}(2x+\ \cos x)^{1/\mathrm{sen}(45x)}$.

Resolução: Temos que

$$\lim_{x\to 0}(2x+\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{sen}45x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\ln\left((2x+\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{sen}45x}}\right)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(2x+\cos x)}{\mathrm{sen}45x}}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+\cos x)}{\mathrm{sen}45x}$$

é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, já que

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sen}45x = 0, \quad \lim_{x\to 0} 2x+\cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \ln(2x+\cos x) = \ln(1) = 0,$$

onde a penúltima igualdade segue do fato que a função $\ln(x)$ é contínua.

Portanto, pela Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+\cos x)}{\mathrm{sen}45x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-\mathrm{sen}x)}{(2x+\cos x)(45\cos 45x)} = \frac{2}{45}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}(2x+\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{sen}45x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(2x+\cos x)}{\mathrm{sen}45x}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{45}},$$

onde a última igualdade segue do fato que a função exponencial é contínua.