

Questão 2

(a) (1,5) Prove que para todos $a, b \in]0, +\infty[$ com $0 < a < b$ tem-se:

$$\frac{\operatorname{arctg}(2b)}{\operatorname{arctg}(2a)} < \frac{b}{a}.$$

Resolução: Dados $0 < a < b$, primeiramente observe que como $b > 0$ e $\operatorname{arctg}(2a) > 0$ (já que $a > 0$), então a desigualdade

$$\frac{\operatorname{arctg}(2b)}{\operatorname{arctg}(2a)} < \frac{b}{a}$$

equivale à desigualdade

$$\frac{\operatorname{arctg}(2b)}{b} < \frac{\operatorname{arctg}(2a)}{a}.$$

Considere a função $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}$ definida no intervalo $]0, +\infty[$ e provemos que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$.

Temos que f é derivável em todos os pontos de seu domínio e

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \operatorname{arctg}(2x) \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2x - (1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)}{(1+4x^2)x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ e $1+4x^2 > 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, o sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal de $g(x) = 2x - (1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Note que g está definida em \mathbb{R} e g é contínua e derivável em todos os pontos de seu domínio. Além disso, $g(0) = 0$ e

$$g'(x) = 2 - 8x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - (1+4x^2) \cdot \frac{2}{1+4x^2} = -8x \cdot \operatorname{arctg}(2x).$$

Logo, $g'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, donde concluímos que g é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$. Portanto, g é estritamente negativa em $]0, +\infty[$ e, então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Segue que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$, como queríamos.

(b) (1,0) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + \cos x)^{1/\text{sen}(35x)}$.

Resolução: Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + \cos x)^{\frac{1}{\text{sen}35x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((3x + \cos x)^{\frac{1}{\text{sen}35x})}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(3x + \cos x)}{\text{sen}35x}}.$$

Mas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x + \cos x)}{\text{sen}35x}$$

é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, já que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}35x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x + \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(3x + \cos x) = \ln(1) = 0,$$

onde a penúltima igualdade segue do fato que a função $\ln(x)$ é contínua.

Portanto, pela Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x + \cos x)}{\text{sen}35x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - \text{sen}x)}{(3x + \cos x)(35\text{cos}35x)} = \frac{3}{35}.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + \cos x)^{\frac{1}{\text{sen}35x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(3x + \cos x)}{\text{sen}35x}} = e^{\frac{3}{35}},$$

onde a última igualdade segue do fato que a função exponencial é contínua.