

1. Seja $f(x) = \left(\frac{1 + 8 \ln x}{x^8}\right) + 2$. Admita que $f'(x) = \frac{-64 \ln x}{x^9}$.

- (a) (0,5) Determinar os intervalos abertos nos quais f é estritamente crescente e nos quais é estritamente decrescente;
- (b) (1,0) Estude a concavidade de f e determine, caso existam, os pontos de inflexão;
- (c) (0,5) Determine, caso existam, as assíntotas de f ;
- (d) (1,0) Esboce o gráfico de f .

Note que o domínio de f é $]0, +\infty[$.

(a) Para determinar os intervalos pedidos basta estudarmos o sinal de f' . Logo temos a seguinte tabela:

	$0 < x < 1$	$1 < x$
sinal de $\ln x$	-	+
sinal de $\frac{-64}{x^9}$	-	-
sinal de f'	+	-
crescimento e decrescimento de f	\nearrow	\searrow

Da tabela acima temos que f é estritamente crescente em $]0, 1[$ e f é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$.

(b) Calculando f'' temos

$$f''(x) = \frac{-64}{x^{18}} \left(\frac{x^9}{x} - 9x^8 \ln x \right) = \frac{-64x^8(1 - 9 \ln x)}{x^{18}} = \frac{-64(1 - 9 \ln x)}{x^{10}}$$

Notemos que

$$1 - 9 \ln x > 0 \iff \frac{1}{9} > \ln x \iff e^{1/9} > e^{\ln x} = x > 0;$$

$$1 - 9 \ln x < 0 \iff \frac{1}{9} < \ln x \iff e^{1/9} < e^{\ln x} = x;$$

$$1 - 9 \ln x = 0 \iff \frac{1}{9} = \ln x \iff e^{1/9} = e^{\ln x} = x.$$

Logo temos a seguinte tabela:

	$0 < x < e^{1/9}$	$e^{1/9} < x$
sinal de $1 - 9 \ln x$	+	-
sinal de $\frac{-64}{x^{10}}$	-	-
sinal de f'	-	+
concavidade de f	\cap	\cup

Da tabela acima concluímos que f tem concavidade para baixo em $]0, e^{1/9}[$ e f tem concavidade para cima em $]e^{1/9}, +\infty[$. Como houve mudança de concavidade antes e depois do ponto $e^{1/9}$ e f é contínua neste ponto temos que $e^{1/9}$ é ponto de inflexão de f .

(c) Para determinar as assíntotas de f notemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^8} (1 + 8 \ln x) + 2 \right) = -\infty, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^8} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 8 \ln x) = -\infty.$$

Do cálculo acima temos que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

A seguir calcularemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 8 \ln x}{x^8}$.

Seja $l(x) = 1 + 8 \ln x$ e $j(x) = x^8$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = +\infty$, temos que para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l(x)}{j(x)}$ estamos no caso $\frac{\infty}{\infty}$ e assim podemos usar as Regras de L'Hospital.

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l'(x)}{j'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{x}}{8x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^8} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 8 \ln x}{x^8} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l'(x)}{j'(x)} = 0,$$

e assim $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 2 = 2$.

Das contas acima concluímos que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

(d) Note que $f(e^{1/9}) = \frac{1 + 8 \ln(e^{1/9})}{e^{8/9}} + 2 = \frac{17}{9e^{8/9}} + 2 < 1 + 2 = 3$ e $f(1) = 1 + 2 = 3$. De todos os cálculos anteriores podemos afirmar que o gráfico de f tem o seguinte formato:

