1. Seja $f(x) = \left(\dfrac{1+4\ln x}{x^4}\right) - 3$. Admita que $f'(x) = \dfrac{-16\ln x}{x^5}$.

   (a) (0,5) Determinar os intervalos abertos nos quais f é estritamente crescente e nos quais é estritamente decrescente;

   (b) (1,0) Estude a concavidade de f e determine , caso existam, os pontos de inflexão;

   (c) (0,5) Determine, caso existam, as assíntotas de f;

   (d) (1,0) Esboce o gráfico de f.

Note que o domínio de f é $]0,+\infty[$.

(a) Para determinar os intervalos pedidos basta estudarmos o sinal de f'. Logo temos a seguinte tabela:

	$0<x<1$	$1<x$
sinal de lnx	-	+
sinal de $\frac{-16}{x^5}$	-	-
sinal de f'	+	-
crescimento e decrescimento de f	$\nearrow$	$\searrow$

Da tabela acima temos que f é estritamente crescente em $]0,1[$ e f é estritamente decrescente em $]1,+\infty[$.

(b) Calculando f'' temos

$$f''(x) = \frac{-16}{x^{10}}\left(\frac{x^5}{x} - 5x^4\ln x\right) = \frac{-16x^4(1-5\ln x)}{x^{10}} = \frac{-16(1-5\ln x)}{x^6}$$

Notemos que

$$1-5\ln x > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5} > \ln x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{1/5} > \mathrm{e}^{\ln x} = x > 0\,;$$

$$1 - 5\ln x < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5} < \ln x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{1/5} < \mathrm{e}^{\ln x} = x\,;$$

$$1 - 5\ln x = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5} = \ln x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{1/5} = \mathrm{e}^{\ln x} = x\,.$$

Logo temos a seguinte tabela:

	$0 < x < \mathrm{e}^{1/5}$	$\mathrm{e}^{1/5} < x$
sinal de $1 - 5\,lnx$	+	-
sinal de $\frac{-16}{x^6}$	-	-
sinal de $f\,'$	-	+
concavidade de f	$\cap$	$\cup$

Da tabela acima concluímos que f tem concavidade para baixo em $]0, \mathrm{e}^{1/5}[$ e f tem concavidade para cima em $]\mathrm{e}^{1/5}, +\infty[$. Como houve mudança de concavidade antes e depois do ponto $\mathrm{e}^{1/5}$ e f é contínua neste ponto temos que $\mathrm{e}^{1/5}$ é ponto de inflexão de f.

(c) Para determinar as assíntotas de f notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{1}{x^4}(1 + 4\ln x) - 3\Big) = -\infty\,, \text{ pois } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} (1 + 4\ln x) = -\infty\,.$$

Do cálculo acima temos que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

A seguir calcularemos $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + 4\ln x}{x^4}$.

Seja $l(x) = 1 + 4\ln x$ e $j(x) = x^4$. Como $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} l(x) = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} j(x) = +\infty$, temos que para calcular $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{l(x)}{j(x)}$ estamos no caso $\frac{\infty}{\infty}$ e assim podemos usar as Regras de L'Hospital.

Notemos que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{l'(x)}{j'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{4x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + 4\ln x}{x^4} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{l'(x)}{j'(x)} = 0\,,$$

e assim $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - 3 = -3.$

Das contas acima concluímos que a reta $y = -3$ é uma assíntota horizontal.

(d) Note que $f(\mathrm{e}^{1/5}) = \dfrac{1+4\ln(\mathrm{e}^{1/5})}{\mathrm{e}^{4/5}} - 3 = \dfrac{9}{5\mathrm{e}^{4/5}} - 3 < 1 - 3 = -2$ e $f(1) = 1 - 3 = -2$. De todos os cálculos anteriores podemos afirmar que o gráfico de f tem o seguinte formato: