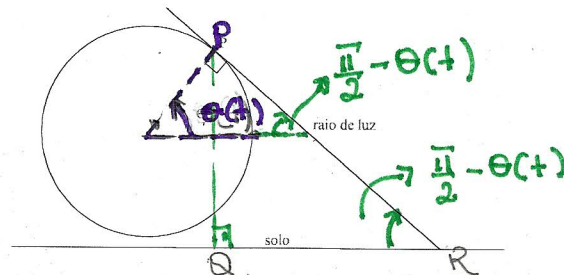


4. (2,5) Uma roda gigante tem 10m de raio e seu centro está a 11m do solo. Ela gira no sentido anti-horário. Seja P um ponto fixado nessa roda. No instante t_0 em que P está a 16m do solo, a distância de P ao solo varia a uma taxa de 30m/min.

- (a) A que taxa a roda está girando no instante t_0 ? (Ou seja, qual é a taxa de variação de θ em relação ao tempo no instante t_0 ?)
- (b) Do ponto P parte um raio de luz que tangencia a circunferência e ilumina um ponto no solo (veja a figura). Qual é a taxa de variação da distância do ponto P ao ponto que ele ilumina no solo no instante t_0 ?



(a) Sejam $\theta(t)$ o ângulo da figura no instante t e $y(t)$ a distância de P ao solo no instante t . Sabemos que $y(t_0) = 16\text{m}$ e que $y'(t_0) = 30\text{ m/min}$.

Observe que $y(t) = 11 + 10 \sin \theta(t)$. Assim $y'(t) = 10 \cos \theta(t) \theta'(t)$. Em t_0 :

$$y'(t_0) = 10 \cos \theta(t_0) \theta'(t_0)$$

Voltando em (*) temos que $y(t_0) = 11 + 10 \sin \theta(t_0) \Rightarrow$

$$\sin \theta(t_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ Assim}$$

$$30 = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} \theta'(t_0) \Rightarrow \theta'(t_0) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ rad/min}$$

(b) Seja $d(t)$ a distância de P ao ponto que ele ilumina no solo no instante t .

Temos que $\widehat{QRP} = \frac{\pi}{2} - \theta(t)$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(t)\right) = \frac{y(t)}{d(t)}$.

Assim: $d(t) \cos \theta(t) = y(t)$. Derivando, temos:

$$(d(t) \cos \theta(t))' = y'(t) \Rightarrow d'(t) \cos \theta(t) + d(t) (-\sin \theta(t) \theta'(t)) = y'(t)$$

Em t_0 : $d'(t_0) \cos \theta(t_0) + d(t_0) (-\sin \theta(t_0)) \theta'(t_0) = y'(t_0)$

Mas $d(t_0) = \frac{y(t_0)}{\cos \theta(t_0)} = \frac{16}{\sqrt{3}/2} = \frac{32}{\sqrt{3}} \text{ m}$.

Assim $d'(t_0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} + 30 \Rightarrow d'(t_0) = (62) \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m/min}$