2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}(\frac{1}{x})\left[\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right] & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,5) A função f é derivável em $x = 0$? **JUSTIFIQUE!**

(b) (1,5) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

a) Para verificar se f é derivável em $x=0$ precisamos saber se existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^3}\right)$

Note que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x^2)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x^2)-1}{x^3}\cdot\frac{\cos(5x^2)+1}{\cos(5x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}^2(5x^2)}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos(5x^2)+1} = \lim_{x\to 0} -25x\,\frac{\text{sen}^2(5x^2)}{25x^4}\cdot\frac{1}{\cos(5x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{-25x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\text{sen}(5x^2)}{5x^2}\right)^2}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(5x^2)+1}}_{\to 1/2} = 0$$

$\left[\text{Obs: } \lim \frac{\text{sen}(5x^2)}{5x^2} = \quad (u=5x^2 \quad x\to 0 \Rightarrow u\to 0) \quad = \lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}\,u}{u} = 1\right]$

Como $g(x) = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada (pois $-\pi/2 < \text{arctg}\,\frac{1}{x} < \pi/2 \quad \forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$), por uma consequência do Teorema do Confronto, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \text{arctg}(1/x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right)}^{\lim \to 0} = 0.$$

Logo f é derivável em $x=0$ e $f'(0)=0$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right) + \text{arctg}(1/x)\cdot g'(x)$, onde

$$g'(x) = \left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right)' = \frac{-\text{sen}(5x^2).10x.\,x^2 - 2x(\cos(5x^2)-1)}{x^4} =$$

$$= \frac{-10x^3\,\text{sen}(5x^2) - 2x(\cos(5x)-1)}{x^4}$$