2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}(\frac{1}{x}) \left[\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right] & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,5) A função f é derivável em $x = 0$? **JUSTIFIQUE!**

(b) (1,5) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

a) Para verificar se f é derivável em $x=0$, precisamos saber se existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^3}\right)$

Note que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)-1}{x^3}\cdot\frac{\cos(3x^2)+1}{\cos(3x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}^2(3x^2)}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos(3x^2)+1} = \lim_{x\to 0} -9x\,\frac{\text{sen}^2(3x^2)}{9x^4}\cdot\frac{1}{\cos(3x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{-9x}_{0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\text{sen}(3x^2)}{3x^2}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\underbrace{\cos(3x^2)}_{1}+1}}_{1/2} = 0$$

[Obs: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(3x^2)}{3x^2} =$ ($u = 3x^2$ $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$) $= \lim\limits_{u\to 0}\frac{\text{sen}\,u}{u} = 1$]

Como $g(x) = \text{arctg}(\frac{1}{x})$ é uma função limitada (pois $-\pi/2 < \text{arctg}\frac{1}{x} < \pi/2$ $\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$), por uma consequência do Teorema do Confronto, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\text{arctg}(1/x)}_{\text{lim}}\cdot\overbrace{\left(\frac{\cos(3x^2-1}{x^2}\right)}^{\to 0} = 0.$$

Logo f é derivável em $x=0$ e $f'(0)=0$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right) + \text{arctg}(1/x)\cdot g'(x)$, onde

$$g'(x) = \left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right)' = \frac{-\text{sen}(3x^2)\cdot 6x\cdot x^2 - 2x(\cos(3x^2)-1)}{x^4} =$$

$$= \frac{-6x^3\,\text{sen}(3x^2) - 2x(\cos(3x^2)-1)}{x^4}$$