

MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º Semestre de 2013 - 1ª Lista de Exercícios

I. Limites de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{-x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + 3x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{2 - \sqrt{x^3 - 4}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 1} - 1}{x^4}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(20x)}{\text{sen}(301x)}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}(2x))}{x}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{tg}(3x) \text{cosec}(6x))$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(3x^2 - 5x + 2)}{x^2 + x - 2}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x^3 - x^2}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^3(x) \text{sen}(\frac{1}{x})}{x^2}$ |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x^3 - 1) \cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt{x} - 1}$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right)$ |
| 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1} \right)$ |
| 25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x - 8}{\sqrt{x^6 + x + 1}}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 9} + x + 3)$ | 27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x) \text{sen}(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4x}}$ |
| 28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x \cos(\sqrt{x})}{x^4 \text{sen}(1/x) + 1}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\text{sen } x + \sqrt{x} \cos x)}{x\sqrt{x} - \text{sen}(x\sqrt{x})}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12} + 5x^4 + 7}}{2x^3 + 2}$ |
| 31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$ | 32. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - 5x + 3}}{x^2 - 1}$ | 33. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x + 2x^2 \text{sen}(\frac{1}{x})}{x - \sqrt{1 + x^2}}$ |

Resp.: 1) $-3/4$; 2) $1/5$; 3) $-1/6$; 4) 0 ; 5) $1/3$; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\frac{20}{301}$; 8) 2 ; 9) $1/2$; 10) $1/6$; 11) -1 ; 12) -1 ; 13) $1/3$; 14) $-\infty$; 15) 0 ; 16) \exists ; 17) \exists ; 18) 0 ; 19) $-\infty$; 20) $+\infty$; 21) 0 ; 22) $1/3$; 23) 1 ; 24) $-\infty$; 25) $-\infty$; 26) 3 ; 27) $32\sqrt{2}$; 28) 3 ; 29) 0 ; 30) $-\sqrt[4]{7}/2$; 31) $1/2$; 32) \exists ; 33) $-\infty$.

2. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}_{\rightarrow 0} - 1 \right)}_{\rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

3. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L$. Determine c e L .

Resp.: $c = -1$; $L = 5/2$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Assumindo que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x}$. Resp.: 2.

(b) Assumindo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Resp.: 0.

(c) Assumindo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Resp.: $+\infty$.

5. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada, f é positiva e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$. Resp.: Falsa.

(b) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$. Resp.: Verdadeira.

(c) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$. Resp.: Falsa.

6. Dê exemplos de funções f e g tais que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 1$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) \neq 0$.

7. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x}$. Resp.: 0.

9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cos \left(\frac{1}{x + x^2} \right) \right)$. Resp.: 0; 0.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|\sin x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\sin x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x) + \cos x)$. Resp.: 1.

11. Sejam C o círculo de raio 1 e centro em $(1, 0)$, C_r o círculo de raio r (onde $0 < r < 2$) e centro em $(0, 0)$, P_r o ponto $(0, r)$ e Q_r o ponto, situado no primeiro quadrante, intersecção dos círculos C e C_r . Se L_r é a intersecção da reta P_rQ_r com o eixo Ox , o que acontecerá com L_r quando C_r encolher, isto é, quando $r \rightarrow 0^+$? Resp.: aproximar-se-á do ponto $(4, 0)$.

II. Continuidade de Funções

1. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2 - 4) + 5, & \text{se } x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \frac{1 + (-1)^{[x]}}{2} \operatorname{sen}(\pi x).$$

Obs.: o símbolo $[x]$ denota o maior número inteiro que é menor ou igual a x e é definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Resp.: a) \mathbb{R} ; b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; d) \mathbb{R} .

2. Determine L para que a função dada seja contínua em \mathbb{R} .

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 2) - \operatorname{sen}(x + 2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^8 + x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Resp.: (a) $-\cos 2$; (b) 1 .

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê? Resp. Não.

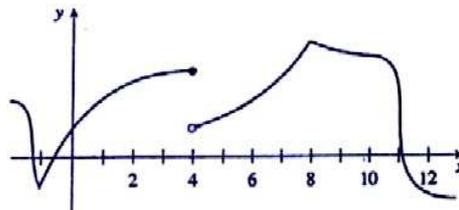
4. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

(b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

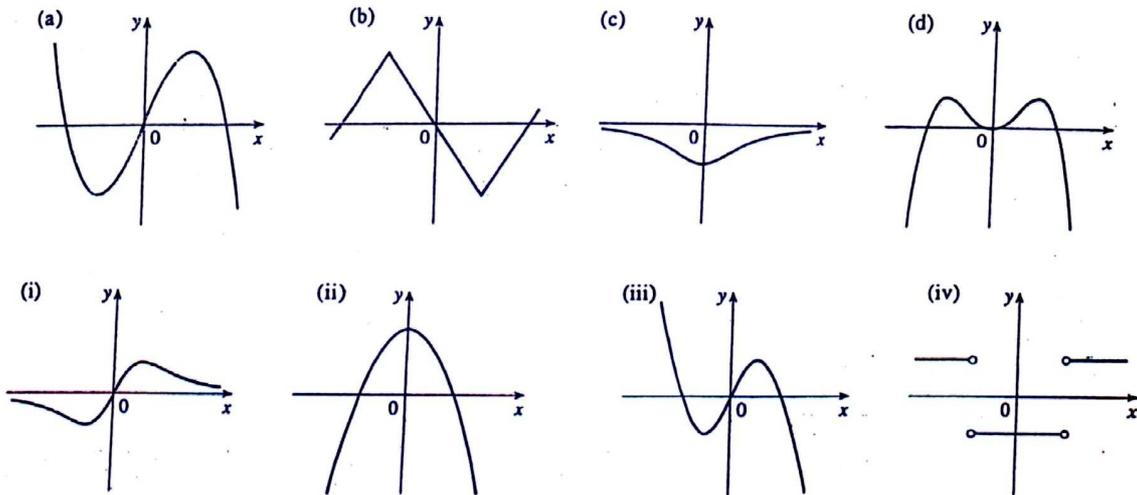
III. Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



Resp.: -1 ; 4 ; 8 ; 11 .

2. Associe cada um dos gráficos de função, de (a) a (d), com os gráficos de suas respectivas derivadas, de (i) a (iv).



Resp.: (a) e (ii) ; (b) e (iv) ; (c) e (i) ; (d) e (iii) .

3. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I , $a \in I$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}$
 Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

4. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
 seja derivável em \mathbb{R} e $f'(0) = 0$.

Resp.: $a = -3/2, b = 0; c = 7/2$.

5. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0 , sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{sen } x, & \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$ (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1 \\ x^4, & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x \text{sen } \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$ (f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen } \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$ (obs: $\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$, para todo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\setminus \{0\}$)

(h) $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(i) $f(x) = |\text{sen } x|, x_0 = 0$ j) $f(x) = |\text{sen}(x^5)|, x_0 = 0$ k) $f(x) = \cos(\sqrt{|x|}), x_0 = 0$

Resp.: são contínuas em x_0 : (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k); são deriváveis em x_0 : (f), (g), (j).

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}[(3+x)^2] - \text{tg } 9}{x}$.

Resp: $6 \sec^2 9$.

7. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

$$1) f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$2) f(x) = \frac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$$

$$3) f(x) = \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$$

$$4) f(x) = x \operatorname{sen}(\sqrt{x^5} - x^2)$$

$$5) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$$

$$6) f(x) = \sqrt[6]{x \operatorname{tg}^2 x}$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{cosec} x}{x^3 + 3x^2}$$

$$8) f(x) = \sec(\sqrt{x^2+1})$$

$$9) f(x) = \frac{x^2 \operatorname{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x}$$

$$10) f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$$

$$11) f(x) = \frac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$$

$$12) f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$$

$$13) f(x) = \frac{2x}{(x + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}$$

$$14) f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$$

$$15) f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sen}^{33} x \cos^{17} x}$$

$$16) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos(x^2)}$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em \mathbb{R} tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é derivável em 0? Resp.: Sim.

9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in]0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$. Resp.: $2\sqrt{a} f'(a)$.

10. Discuta as seguintes "soluções" para a questão "Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

"solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"solução" 4. Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ Logo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$. Portanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

Resp.: somente a solução 4 está correta.

11. Em que pontos f é derivável?

$$a) f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$$

Resp.: a) em todos os pontos, b) em $x_0 \neq 0$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)g(x)$ no ponto $x = 0$. Resp.: 0.

13. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})$.

(a) Calcule $f'(3)$.

Resp.: $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}} \operatorname{sen}(\sqrt[3]{3}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cos(\sqrt[3]{3})$.

(b) Calcule $f'(0)$.

Resp.: -1.

(c) Seja $g(x) = \frac{(5 + f(x))(2x + 3 \sec x)}{x + \operatorname{tg} x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$. Resp.: $-\frac{1}{8}$.

14. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.
Resp: $(3, -3)$.
15. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$. Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.
16. Seja $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$.
Resp.: $y = -9x$; $y = -x$
17. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x+1 + \sin 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -12 .
18. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique. Resp.: Não.
19. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em \mathbb{R} e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9+4x}))^2$. Determine $g'(0)$.
Resp.: -1 .
20. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ ($a \neq 0$) tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.
21. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2-y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$. Resp.: $y = x$.
22. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.
Resp.: $y + x = 2$; $y + x = -2$.
23. Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

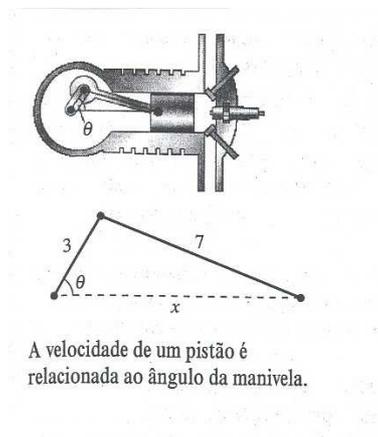
$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2,$$

para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.
Resp.: 2 ; $2x + 7y - 12 = 0$.

IV. Taxas Relacionadas

- (Expansão Adiabática) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V \frac{dp}{dt} = 1,3 p \frac{dV}{dt}$.
- De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h , onde r cresce e h de cresce de um modo determinado pela viscosidade e fluatibilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \frac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\frac{dr}{dt}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

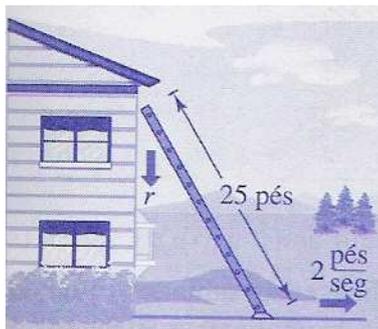
3. Num certo instante t_0 , a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm²/min. No instante t_0 , sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm², qual a taxa de variação da base do triângulo?
Resp.: -1,6 cm/min.
4. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1,2 m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de 0,081m³/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?
Resp.: $\frac{1}{40\pi}$ m/min.
5. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0 , o seu volume cresce a uma taxa de 10cm³/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?
Resp.: $\frac{4}{3}$ cm²/min.
6. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de 1,8m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a 1,2m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.
Resp.: 3,6m/s; 0,9m/s.
7. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m³/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?
Resp.: $\frac{10}{3}$ cm/min.
8. No motor mostrado na figura, um bastão de 7 polegadas tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de 3 polegadas. Na outra extremidade do bastão está um pistão que se desloca quando a manivela gira. Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotações por minuto, calcule a velocidade do pistão quando $\theta = \pi/3$.



Resp.: $\frac{-9600\pi\sqrt{3}}{13}$ polegadas por minuto.

9. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento do foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?
Resp.: 360 pés/s; 0,096 rad/s.
10. (Escada deslizando) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede (veja figura). Num certo instante, a base da escada se

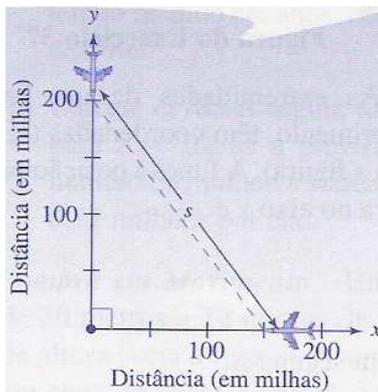
encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.



- (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?
- (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.
- (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

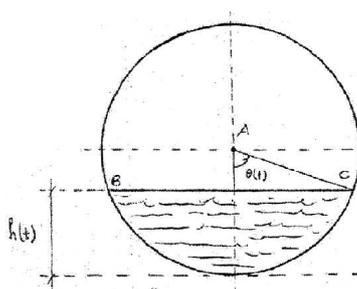
Resp.: (a) $\frac{7}{12}$ pes/s; (b) $\frac{527}{24}$ pes²/s; (c) $\frac{1}{12}$ rad/s.

11. (Controle de Tráfego Aéreo) Um controlador de tráfego aéreo percebe que dois aviões, que estão voando na mesma altitude e ao longo de duas retas perpendiculares entre si, irão se chocar no ponto de intersecção destas retas (veja figura).



Num certo instante um dos aviões está a 150 milhas desse ponto e está se deslocando a uma velocidade de 450 milhas por hora. O outro avião está a 200 milhas do ponto e tem uma velocidade de 600 milhas por hora. A que taxa a distância entre os aviões está diminuindo nesse instante? Resp: 750 mph.

12. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro deitado de diâmetro 2m e comprimento 3m. A figura abaixo representa a seção transversal do tanque no instante t ; o ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio).



No instante em que a altura h do líquido é de 0,5 m, a vazão é de $0,9\text{m}^3/\text{min}$. Determine a taxa de variação do ângulo θ no instante em que a altura do líquido é de 0,5m. Determine a taxa de variação da altura h do líquido neste mesmo instante. Resp.: $0,2\text{rad}/\text{min}$; $\frac{\sqrt{3}}{10}\text{m}/\text{min}$.

13. Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoo da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 8 cm, a altura h do líquido da parte superior é 10 cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 2 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante. Resp: $\frac{50}{121}\text{cm}/\text{min}$.

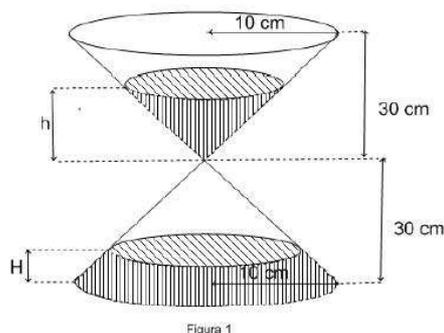


Figura 1

V. Mais algumas derivadas

1. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa f^{-1} seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

2. Usando o exercício anterior, encontre $(f^{-1})'(5)$ sabendo que $f(4) = 5$ e que $f'(4) = \frac{2}{3}$.
3. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \cos(\arctg x)$	(b) $f(x) = x^2 \arctg x$	(c) $f(x) = \arcsen(x^2)$
(d) $f(x) = (1 + \arctg x^2)^3$	(e) $f(x) = \frac{\text{tg}(3x)}{\arctg(3x)}$	(f) $f(x) = \arctg\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$
(g) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsen x$	(h) $f(x) = x \arctg(x^2 - x)$	(i) $f(x) = \arccos x$