

Lista 0 de MAT 2453 - POLI - 2013

1. Você já deve ter aprendido que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Isto é, ele *não* pode ser representado por uma fração $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros e $q \neq 0$. Você sabe provar isso? Daremos aqui um esboço da demonstração. Este é um exemplo de uma *demonstração por absurdo*:

“Suponha que existam números inteiros p e q com $q \neq 0$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos supor que p e q são números *primos entre si*. Então $p^2 = 2q^2$. Logo p é par, ou seja, $p = 2k$ para algum inteiro k . Mas isto implica que $4k^2 = 2q^2$ e então $q^2 = 2k^2$. Portanto q é par. Chegamos assim a uma contradição, pois supusemos que p e q são primos entre si. Esta contradição prova a afirmação que $\sqrt{2}$ é irracional.”

Preencha todos os detalhes desta demonstração. Se p é um número primo qualquer, você é capaz de provar que \sqrt{p} é irracional?

Você sabe determinar um *número racional* r tal que $0 < \sqrt{2} - r < 10^{-5}$?

2. Resolva as inequações:

(a) $x(2x - 1)(x + 1) > 0$ (b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$

(c) $(x + 1000)^2 \geq x + 1000$ (d) $|4 - x^2| \leq \frac{x + 7}{2}$

3. Decida quais afirmações são verdadeiras:

(a) $x - 1 < 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 9$ (b) $\frac{x - 1}{x - 2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{x - 1} < \frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ e $x \neq 0$ (d) $(x^2 - 5)^2 < 4(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 2(x^2 + 1)$

(e) Se $x \neq 2$ então $\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x - 2)$

4. Resolva os sistemas:

(a) $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

5. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$ (c) $f(x) = |\sin x|$

(d) $f(x) = x - |x|$ (e) $f(x) = |3x + 5|$ (f) $f(x) = 3 \cos(2x)$

(g) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ (h) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi/2)$ (i) $f(x) = x^3 - 9$

(j) $f(x) = (x + 5)^4 - 3$ (k) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x + 3}$ (l) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{5} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

(m) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9} + 2$ (n) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (o) $f(x) = \sqrt{-x}$

6. Resolva as inequações:

(a) $|\operatorname{sen} x| > \frac{1}{2}$ (b) $|x^2 - 4| > 2|x^2 - 1|$

7. Tente esboçar o gráfico de:

(a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

8. Seja $n > 0$ um inteiro e $a, b, x \in \mathbb{R}$. Verifique que:

(a) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \right)$

(b) $x - a = (\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4})$

(c) $(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) = 1$

9. Use o exercício 8 para determinar a expressão que deve ser colocada em (...) para que a igualdade seja verdadeira.

(a) $x - 8 = (\sqrt[3]{x} - 2)(\dots)$

(b) $x^2 + x = (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(\dots)$

(c) $x^4 = (\sqrt[4]{x^4 + 1} - 1)(\dots)$