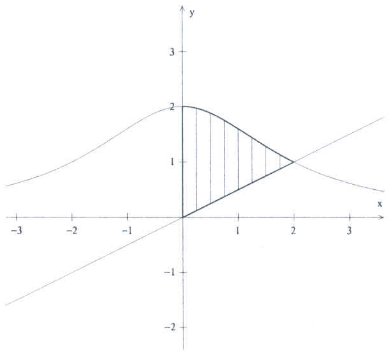
Questão 2. Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{x}{2}$ para $x \in [0, 2]$, como mostra a figura abaixo:



(2,0) a) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox.

(1,5) b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy.

a) $V_x = V_1 - V_2$, $V_1 = \int_0^2 \pi \left(\frac{8}{4+x^2}\right)^2 dx$, $V_2 = \int_0^2 \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$$V_1 = 64\pi \int_0^2 \frac{1}{(4+x^2)^2}\, dx \underset{x = 2\,tg\,t}{=} 64\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2 t\,dt}{(4+4\,tg^2 t)^2} =$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sec^2 t}\, dt = 8\pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt =$$

$$= 8\pi \left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, sen(2t)\Big|_0^{\pi/4}\right] = 8\pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \pi^2 + 2\pi$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_x = \pi^2 + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \pi^2 + \frac{4\pi}{3}$$

B

b) $y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2y$

$y = \frac{8}{4+x^2}, \ x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4+x^2 = \frac{8}{y} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{8}{y} - 4}$

$V_y = V_3 + V_4$

$V_3 = \int_0^1 \pi (2y)^2 dy = \pi \cdot 4 \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi$

$V_4 = \int_1^2 \pi \left(\sqrt{\frac{8}{y} - 4}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{8}{y} - 4\right) dy =$

$= \pi \left[8 \ln y \Big|_1^2 - 4y \Big|_1^2 \right] = \pi (8 \ln 2 - 4)$

$V_y = V_3 + V_4 = \pi \left(8 \ln 2 - 4 + \frac{4}{3}\right) = \pi \left(8 \ln 2 - \frac{2}{3}\right)$