

Questão 3. (1,0) (I) Calcule o seguinte limite: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ln(3-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(3-x)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}},$$

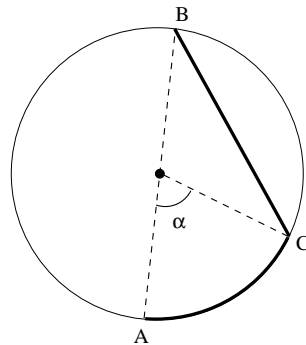
pois a Exponencial é uma função contínua. Note que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(3-x)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, então aplicando a regra de L' Hospital obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(3-x)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{3-x} \cdot (-1)}{-\operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{3-x} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

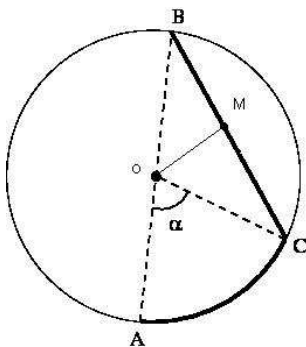
Logo, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = e^{\frac{4}{\pi}}$.

(2,0) (II) Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de 20m de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja a figura).

Sabendo que ela pode caminhar 2 vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α , as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Obs.: Considere que ela pode somente caminhar ou somente nadar.)



Resolução:



A distância caminhando é dada por $d_1 = 10\alpha$, pois é o comprimento do arco AB. Como o triângulo OBC é isósceles, temos que $\operatorname{medida}(\hat{B}) = \operatorname{medida}(\hat{C}) = \frac{\alpha}{2}$ e que $BM = MC$, onde \overline{OM} é altura. Logo a distância nadando é dada por $d_2 = 2 \cdot 10 \cos \frac{\alpha}{2}$.

Se V é a velocidade nadando, então a velocidade caminhando é $2V$. Assim, o tempo total gasto em termos de α é

$$T(\alpha) = \frac{10\alpha}{2V} + \frac{2 \cdot 10 \cos \frac{\alpha}{2}}{V} = \frac{10}{V} \left(\frac{\alpha}{2} + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad \alpha \in [0, \pi].$$

Temos que $T'(\alpha) = \frac{10}{V} \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)$. Então

$$T'(\alpha) > 0 \iff \frac{1}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} > 0 \iff \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \iff 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{6} \iff 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Analogamente, $T'(\alpha) < 0 \iff \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$.

Vemos então que T é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{3}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ é ponto de máximo absoluto de T . O mínimo absoluto de T ocorre em uma das extremidades: Como $T(0) = \frac{20}{V}$ e $T(\pi) = \frac{10\pi}{2V}$ vemos que o menor tempo é quando $\alpha = \pi$, ou seja, quando a pessoa só caminha.