Questão 3. (1,0) **(I)** Calcule o seguinte limite: $\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)}$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 1^-} e^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)\ln(2-x)} = e^{\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)}},$$

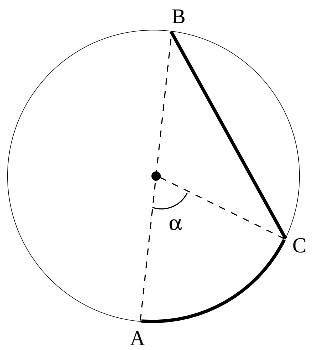
pois a Exponencial é uma função contínua. Note que $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)}$ é uma indeterminação da forma $\dfrac{0}{0}$, então aplicando a regra de L' Hospital obtemos que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-\operatorname{cossec}^2(\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2}x)}{2-x}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

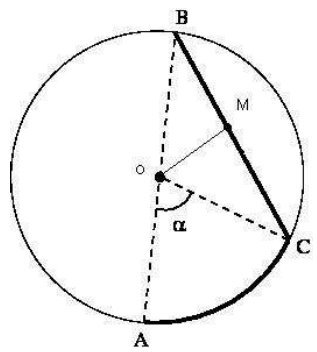
Logo, $\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

(2,0) **(II)** Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de 10m de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja a figura).

Sabendo que ela pode caminhar 2 vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Obs.: Considere que ela pode somente caminhar ou somente nadar.)



Resolução:



A distância caminhando é dada por $d_1 = 5\alpha$, pois é o comprimento do arco AB. Como o triângulo OBC é isósceles, temos que medida$(\hat{B})$ =medida$(\hat{C}) = \dfrac{\alpha}{2}$ e que $BM = MC$, onde $\overline{OM}$ é altura. Logo a distância nadando é dada por $d_2 = 2\cdot 5\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Se V é a velocidade nadando, então a velocidade caminhando é $2V$. Assim, o tempo total gasto em termos de α é

$$T(\alpha) = \frac{5\alpha}{2V} + \frac{2\cdot 5\cos\frac{\alpha}{2}}{V} = \frac{5}{V}\left(\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right),\ \ \alpha\in[0,\pi].$$

Temos que $T'(\alpha) = \frac{5}{V}\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Então

$$T'(\alpha) > 0 \iff \frac{1}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} > 0 \iff \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \iff 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{6} \iff 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Analogamente, $T'(\alpha) < 0 \iff \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$.

Vemos então que T é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{3}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ é ponto de máximo absoluto de T. O mínimo absoluto de T ocorre em uma das extreminades: Como $T(0) = \frac{10}{V}$ e $T(\pi) = \frac{5\pi}{2V}$ vemos que o menor tempo é quando $\alpha = \pi$, ou seja, quando a pessoa só caminha.