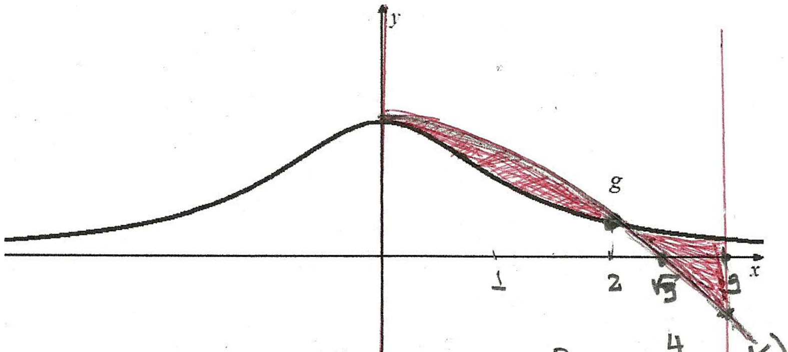
Questão 2. (1,5) (I) Sejam a e b com $1 \le a < b \le \mathrm{e}$. Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \le \frac{1}{a^2}(b-a)$.

Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Então o domínio de f é $]0,+\infty[$ e f é derivável em seu domínio. Logo, se $0<a<b$, f é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$.
$f'(x) = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$. Sejam a e b com $1 \le a < b \le e$.
Pelo TVM, temos que existe $c \in]a,b[$ tal que
$$\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{c^2}(1-\ln c)(b-a).$$
Como $1 \le a < c < b \le e$, temos que $1<c<e$.
Logo $\ln 1 < \ln c < \ln e \Rightarrow 0 < \ln c < 1 \Rightarrow 0 > -\ln c > -1$
$\Rightarrow 1 > 1 - \ln c > 0$. Como $c > a \Rightarrow c^2 > a^2 \Rightarrow \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}$.
Assim $0 < \frac{1-\ln c}{c^2} < \frac{1}{a^2}$. Portanto $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{a^2}(b-a)$.

(1,5) (II) Na figura abaixo está o gráfico de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Seja $f(x) = 1 - \frac{x^2}{5}$. Desenhe a região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x=0$ e $x=3$. Calcule a sua área.



$$1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2} = \left(\cancel{1} + x^2 - \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{5} - \cancel{1}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)x^2}{5(1+x^2)}$$

A área pedida é $A = \int_0^3 \left| 1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2} \right| dx$

Temos que $\left| 1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2} \right| = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2} & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{5} & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

Logo $A = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \int_2^3 \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{5}\right) dx$

$$\overset{TFC}{=} \left(x - \frac{x^3}{15} - \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^2 + \left(\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{15}\right)\Big|_2^3$$

$$= 2 - \frac{8}{15} - \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 - 3 + \frac{27}{15} - \operatorname{arctg} 2 + 2 - \frac{8}{15}$$

$$= \operatorname{arctg} 3 - 2\operatorname{arctg} 2 + \frac{26}{15}$$