Questão 2. (1,5) (I) Sejam a e b com $1 \leq a < b \leq e$. Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{a^2}(b-a)$.

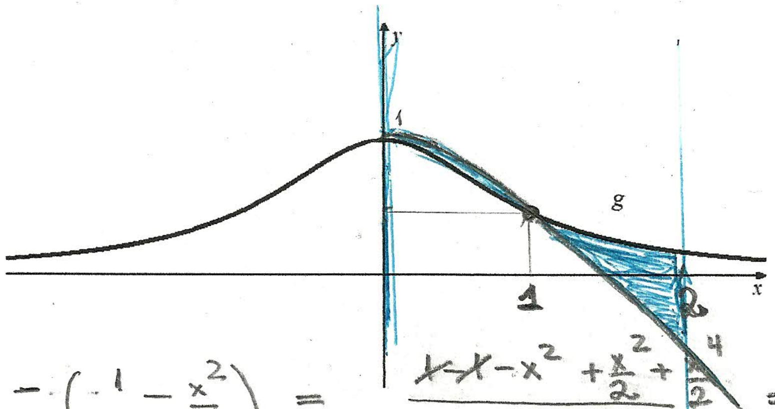
Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. O domínio de f é o intervalo $]0, +\infty[$ e f é derivável em todo o seu domínio. Assim, para todo a, b com $0 < a < b$, f é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Sejam então a e b com $1 \leq a < b \leq e$. Podemos aplicar o TVM. Temos que $\exists\, c \in]a,b[$ tal que

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{(1-\ln x)}{x^2}$. Logo $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \left(\frac{1-\ln c}{c^2}\right)(b-a)$.

Agora, $1 \leq a < c < b \leq e$, logo $1 < c < e \Rightarrow \ln 1 < \ln c < \ln e$
$\Rightarrow 0 > -\ln c > -1 \Rightarrow 1 > 1 - \ln c > 0$. Como $c > a \Rightarrow c^2 > a^2$
$\Rightarrow \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}$. Assim $\frac{1-\ln c}{c^2} < \frac{1}{a^2}$. Portanto $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{a^2}(b-a)$.

(1,5) (II) Na figura abaixo está o gráfico de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Seja $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Desenhe a região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x = 0$ e $x = 2$. Calcule a sua área.



$$\frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}}{1+x^2} = \frac{x^2}{2(1+x^2)}(x^2-1)$$

A área pedida é

$$A = \int_0^2 \left| \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| dx$$

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Logo $A = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$

$$\overset{TFC}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} - \operatorname{arc\,tg} x\right)\Big|_0^1 + \left(\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_1^2$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{6} - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 - \cancel{2} + \frac{8}{6} - \operatorname{arctg} 1 + \cancel{1} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6}{6} - 2\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 = \boxed{1 + \operatorname{arctg} 2 - \pi/2}$$