(4,0) **Questão 1.** Dada a função $f(x) = x - 5\ln(x+1) - \dfrac{4}{x+1}$, determine:

a) o domínio, os limites pertinentes ao estudo e as assíntotas;

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - 5\ln(x+1) - \dfrac{4}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - \dfrac{5\ln(x+1)}{x}\right) - \dfrac{4}{x+1}\right)$

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5\ln(x+1)}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{5}{x+1}}{1} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x+1} = 0$, temos que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$ $\Rightarrow$ Não f não admite assíntota horizontal.

ii) $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \left(x - 5\ln(x+1) - \dfrac{4}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^+} \left[x - \left(\dfrac{5(x+1)\ln(x+1)+4}{x+1}\right)\right]$

Como $\lim_{x\to-1^+} (x+1)\ln(x+1) = \lim_{x\to-1^+} \dfrac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-1^+} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to-1^+} -(x+1) = 0$, temos que $\lim_{x\to-1^+} \left(\frac{5(x+1)\ln(x)+4}{x+1}\right) = +\infty$, assim $\boxed{\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty.}$ $\Rightarrow$ $x = -1$ é uma assíntota vertical.

iii) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{5\ln(x+1)}{x} - \dfrac{4}{x(x+1)}\right) = 1 = m.$

Porém $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - 5\ln(x+1) - \dfrac{4}{x+1} - x\right) = -\infty$. Portanto, f não admite assíntota oblíqua.

b) os intervalos de crescimento e de decrescimento de f;

$f'(x) = 1 - \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 5(x+1) + 4}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x-3)}{(x+1)^2}.$

	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	f
|	$-$	| $+$	| $+$	x
|	$-$	| $-$	| $+$	$(x-3)$
|	$+$	| $-$	| $+$	f'
-1		0	3	

$x = 0$ é um ponto de máximo local e $x = 3$ é um ponto de mínimo local de f.

c) a concavidade e os pontos de inflexão de f ;

$$f''(x) = \frac{(2x-3)(x+1)^2 - (x^2-3x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{5x-3}{(x+1)^3}.$$

	$\cap$		$\cup$	f
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$(5x-3)$
$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$(x+1)$
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
-1		$\frac{3}{5}$		

$x = \dfrac{3}{5}$ é o único ponto de inflexão de f.

d) o esboço do gráfico de f.