(4,0) **Questão 1.** Dada a função $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$, determine:

a) o domínio, os limites pertinentes ao estudo (justifique os seus cálculos) e as assíntotas (caso existam e justifique se não existirem);

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \frac{5\ln(x+2)}{x}\right) - \frac{6}{x+2}\right)$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln(x+2)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x+2}}{1} = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x+2} = 0$, temos que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$ $\Rightarrow$ Não f não admite assíntota horizontal.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2}\right) = \lim_{x\to-2^+}\left[x - \left(\frac{5(x+2)\ln(x+2)+6}{x+2}\right)\right]$

Como $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}(x+2)\ln(x+2) = \lim_{x\to-2^+}\frac{\ln(x+2)}{\frac{1}{x+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to-2^+}\frac{\frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{(x+2)^2}} = \lim_{x\to-2^+} -(x+2) = 0$, temos que $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\left(\frac{5(x+2)\ln(x)+6}{x+2}\right) = +\infty$, assim $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.}$ $\Rightarrow$ $x = -2$ é uma assíntota vertical.

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5\ln(x+2)}{x} - \frac{6}{x(x+2)}\right) = 1 = m.$

Porém $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2} - x\right) = -\infty$. Portanto, f não admite assíntota oblíqua.

b) os intervalos de crescimento e de decrescimento de f;

$f'(x) = 1 - \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{6}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)^2 - 5(x+2) + 6}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)^2}.$

$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	f
$-$	$+$	$+$	x
$-$	$-$	$+$	$(x-1)$
$+$	$-$	$+$	f'
-2	0	1	

$x = 0$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local de f.

c) a concavidade e os pontos de inflexão de f ;

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x+2)^2 - (x^2-x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{5x-2}{(x+2)^3}.$$

	$\cap$		$\cup$	f
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$(5x-2)$
$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$(x+2)$
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
-2		$\frac{2}{5}$		

$x = \dfrac{2}{5}$ é o único ponto de inflexão de f.

d) o esboço do gráfico de f.