Questão 3.

I) Considere o triângulo retângulo ABC, em que os catetos são $AB = b$ e $AC = h$. Assuma que b e h variam com o tempo t e satisfazem a seguinte relação:

$$b = 2\pi + \operatorname{sen} h.$$

Num determinado instante t_0, tem-se $h = \pi$ e a taxa de variação da área do triângulo ABC é igual a 8π.

i) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação de h no instante t_0.

ii) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação do ângulo $\widehat{ACB}$ no instante t_0.

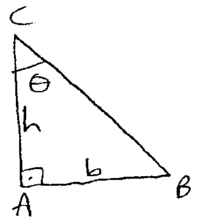
II) (1,5 ponto) Seja $f(x) = \left(\operatorname{tg}(4x) + 2\right)^4(\operatorname{arcsen} x + 1)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

(I)

$A = \frac{bh}{2}$

$tg\theta = \frac{b}{h}$

$b = 2\pi + \operatorname{sen} h$



$b(t) = 2\pi + \operatorname{sen} h(t) \Rightarrow b'(t) = \cos h(t) \cdot h'(t)$

$A(t) = \frac{b(t)\,h(t)}{2} \Rightarrow A'(t) = \frac{b'(t)h(t) + b(t)h'(t)}{2}$

$tg\theta(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \Rightarrow \sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{b'(t)\,h(t) - h'(t)\,b(t)}{h(t)^2}$

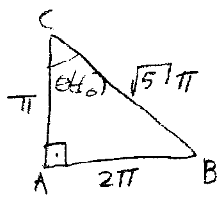
(i) $t = t_0$ $\quad h(t_0) = \pi \Rightarrow b(t_0) = 2\pi$ $\qquad A'(t_0) = 8\pi$

$\Rightarrow b'(t_0) = -h'(t_0)$

$A'(t_0) = \frac{b'(t_0)\,h(t_0) + b(t_0)\,h'(t_0)}{2} \Rightarrow 8\cancel{\pi} = \frac{-h'(t_0)\pi + 2\pi h'(t_0)}{2} \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = 16}$

$\Rightarrow b'(t_0) = -16$

(ii) $t = t_0$



$\cos\theta(t_0) = \frac{\pi}{\sqrt{5}\,\pi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec^2\theta(t_0) = 5$

$\sec^2\theta(t_0)\,\theta'(t_0) = \frac{b'(t_0)\,h(t_0) - h'(t_0)\,b(t_0)}{h(t_0)^2} \Rightarrow 5\theta'(t_0) = \frac{-16\pi - 16 \cdot 2\pi}{\pi^2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{9{,}6}{\pi}}$

(II) $f'(x) = 4(tg(4x)+2)^3 \sec^2(4x) \cdot 4\,(\operatorname{arcsen} x + 1) + (tg(4x)+2)^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f'(0) = 4 \cdot 2^3 \cdot 4 + 2^4 = 144 \\ f(0) = 2^4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$ reta tangente por $(0,16)$: $\boxed{y = 16 + 144x}$