

Questão 3.

- I) Considere o triângulo retângulo ABC , em que os catetos são $AB = b$ e $AC = h$. Assuma que b e h variam com o tempo t e satisfazem a seguinte relação:

$$b = 3\pi + \operatorname{sen} h.$$

Num determinado instante t_0 , tem-se $h = \pi$ e a taxa de variação da área do triângulo ABC é igual a 10π .

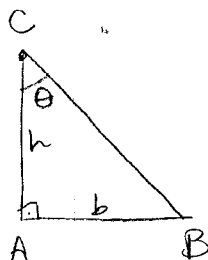
- i) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação de h no instante t_0 .
- ii) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação do ângulo \widehat{ACB} no instante t_0 .
- II) (1,5 ponto) Seja $f(x) = (\operatorname{tg}(5x) + 2)^4 (\operatorname{arcsen} x + 1)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

Ⓘ

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{h}$$

$$b = 3\pi + \operatorname{sen} h$$



$$b(t) = 3\pi + \operatorname{sen} h(t) \Rightarrow b'(t) = \cos h(t) \cdot h'(t)$$

$$A(t) = \frac{b(t)h(t)}{2} \Rightarrow A'(t) = \frac{b'(t)h(t) + b(t)h'(t)}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \Rightarrow \sec^2 \theta(t) \theta'(t) = \frac{b'(t)h(t) - h'(t)b(t)}{h(t)^2}$$

$$(i) t = t_0 \quad h(t_0) = \pi \Rightarrow b(t_0) = 3\pi$$

$$\Rightarrow b'(t_0) = -h'(t_0)$$

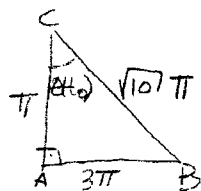
$$A'(t_0) = 10\pi$$

$$\Rightarrow A'(t_0) = \frac{b'(t_0)h(t_0) + b(t_0)h'(t_0)}{2}$$

2

$$10\pi = \frac{-h'(t_0)\pi + 3\pi h'(t_0)}{2} \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = 10} \Rightarrow b'(t_0) = -10$$

(ii) $t = t_0$



$$\cos \theta(t_0) = \frac{\pi}{\sqrt{10}\pi} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sec^2 \theta(t_0) = 10$$

$$\sec^2 \theta(t_0) \theta'(t_0) = \frac{b'(t_0)h(t_0) - h'(t_0)b(t_0)}{h(t_0)^2} \Rightarrow 10\theta'(t_0) = \frac{-10\pi - 10 \cdot 3\pi}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{4}{\pi}}$$

Ⓡ $f'(x) = 4(\operatorname{tg}(5x) + 2)^3 \sec^2(5x) \cdot 5 \cdot (\operatorname{arcsen} x + 1) + (\operatorname{tg}(5x) + 2)^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(0) = 4 \cdot 2^3 \cdot 5 + 2^4 = 176$$

$$f(0) = 2^4 = 16$$

\Rightarrow reta tangente por $(0, 16)$: $\boxed{y = 16 + 176x}$