Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)\sqrt[3]{x-5}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 5$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\text{sen}(x-5)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 5$? Por que?

a) Para $x=5$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} = \lim_{x\to 5} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\frac{\operatorname{sen} 5}{5} < 0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-5)^2}}_{\to 0\ (>0)}} = -\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=5$.

Para $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \sqrt[3]{x-5} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x-5} = 1 \cdot \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} \neq 1 = f(0)$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$.

b) Para $x \neq 0$ e $x \neq 5$, f é derivável, pois $\operatorname{sen} x$, x, $\sqrt[3]{x-5}$ são deriváveis nesses pontos

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x \cdot \sqrt[3]{x-5} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-5)^2}}\right)x - \operatorname{sen} x \cdot \sqrt[3]{x-5}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to 5} \frac{h(x)-h(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-5)\operatorname{sen}(x-5)^2}}{(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2}} = \frac{\operatorname{sen} 5}{5},$$

$\left(\text{pois } \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2} = \lim \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1 \quad u=(x-5)^2,\ x\to 5 \Rightarrow u \to 0\right.$

$\left.\text{e } \sqrt[3]{x} \text{ é contínua}\right)$

Logo, $h(x)$ é derivável em $x=5$

$\left(\text{e } h'(5) = \frac{\operatorname{sen} 5}{5}\right)$