Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\ \sqrt[3]{x-3}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 3$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x-3)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 3$? Por que?

a) Para $x=3$:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\frac{\sqrt[3]{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to\frac{\operatorname{sen}3}{3}}\cdot\frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-3)^2}}_{\to 0\,(>0)}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=3$.

Para $x=0$:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sqrt[3]{x-3} = \underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x-3} = -\sqrt[3]{3} \neq 1 = f(0).$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$

b) Para $x\neq0$ e $x\neq3$, f é derivável, pois $\operatorname{sen}x$, $\sqrt[3]{x-3}$ e x são deriváveis nesses pontos.

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x\cdot\sqrt[3]{x-3} + \operatorname{sen}x\,\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)x - \operatorname{sen}x\,\sqrt[3]{x-3}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\frac{\sqrt[3]{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)^2}}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2}} = \frac{\operatorname{sen}3}{3}$$

(pois $\lim_{x\to3}\dfrac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{u\to0}\dfrac{\operatorname{sen}u}{u} = 1$; $u=(x-3)^2$, $x\to3 \Rightarrow u\to0$
e $\sqrt[3]{x}$ é contínua)

logo, $h(x)$ é derivável em $x=3$

(e $h'(3) = \dfrac{\operatorname{sen}3}{3}$)