MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I - POLI

1o. Semestre de 2012 - 3a. Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^2+1}{x^2}\,dx$ 2. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \cos 7x\,dx$ 4. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{7}{x-2}\,dx$ 6. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\sec^2 x\,dx$ 7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ 8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

9. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ 10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ 11. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ 14. $\displaystyle\int \sec x\,dx$ 15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$ 17. $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$ 18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}$ 20. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ 21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

22. $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\,dx$ 23. $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$ 24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ 26. $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2010}\,dx$ 27. $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen} x\,dx$

28. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$ 29. $\displaystyle\int x^r\ln x\,dx,\ r\in\mathbb{R}$ 30. $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

31. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ 32. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$ 33. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

34. $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$ 35. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ 36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$ 38. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ 39. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$ 41. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ 42. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 44. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ 45. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$

47. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$

49. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

50. $\int \dfrac{x}{x^2-4}\, dx$

51. $\int \dfrac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\, dx$

52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\, dx$

53. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$

54. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\, dx$

55. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$

56. $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

57. $\int \cos^3 x\, dx$

58. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$

59. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$

60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos^5\left(\dfrac{x}{2}\right) dx$

61. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\, \cos^3 x}$

62. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^5 x\, dx$

64. $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^4 x\, dx$

65. $\int \cos^6(3x)\, dx$

66. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\, dx$

67. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\, \cos^4 x}$

68. $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, dx$

69. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
(Sugestão: faça $u = \sqrt[6]{x}$)

70. $\int \dfrac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}\, dx$

71. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

72. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$

73. $\int \dfrac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\, dx$

74. $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$

75. $\int \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$

76. $\int x^5 e^{-x^3} dx$

77. $\int \dfrac{x+1}{x^2(x^2+4)}\, dx$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\int_{-1}^{1} x^3 \operatorname{sen}(x^2+1)\, dx$.

2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.

4. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$.

6. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.

   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^x\}$.

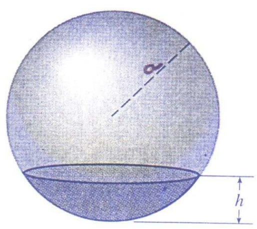
   d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$.

8. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq \mathrm{e}^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

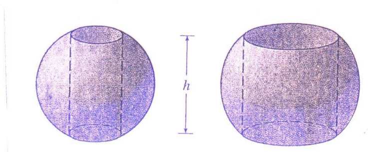
10. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

11. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq a$, de uma esfera de raio a.



12. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.

13. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a,b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

   A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

2. Calcule $g'(x)$ onde

   (a) $g(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$ (b) $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2) dt$

3. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x)dx$ em termos de $F(2)$.

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t)\,dt$$

   Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Seja $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3-1}dt$.

   (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

IV - Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

   (a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) sen $(0,1)$

2. Mostre que: a) $|\operatorname{sen} x - x| \le \frac{1}{3!}|x|^3 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$

   b) $0 \le e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3$ para $0 \le x \le 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \boldsymbol{R}$

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

b) Avalie sen (1) com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = \mathrm{e}^x$ em torno de $x_0 = 0$.
b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.
c) Mostre que para todo $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\left|\mathrm{e}^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

d) Avalie $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\left|\int_0^1 \cos(x^2)dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ derivável até 2ª ordem em I. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o "teste da segunda derivada", isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e
a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a.
b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a.

V - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \, \cos x}{x+1} dx$ em termos de $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$.

3. *Trabalho*. Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

4. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$
para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$
onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

5. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$
e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:
$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$
Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:
$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$
Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

6. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.

7. Seja $G(x) = \int_0^x \left(t \int_0^t \mathrm{e}^{u^2}\,du\right) dt$. Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.

8. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

9. Calcule o comprimento do arco da curva $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a\ln(\frac{x}{a-\sqrt{a^2-x^2}})$ no intervalo fechado $[c_0, c_1] \subset]0, a[$ (suponha $a > 0$).

10. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

 (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

 (b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

 (c) Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

 (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

11. Estude as seguintes integrais de Riemann impróprias:

 (a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\, dx$

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$

2) $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + k$

3) $\frac{1}{7}\mathrm{sen}\, 7x + k$

4) $\mathrm{tg}x - x + k$

5) $7\ln|x-2| + k$

6) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + k$

7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + k$

10) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x^2 + k$

12) $x - \mathrm{arctg}\, x + k$

13) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\sec x + \mathrm{tg}x| + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

16) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$

18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$

19) $\ln|\mathrm{arcsen}\, x| + k$

20) $\ln(1+\mathrm{e}^x) + k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x) + k$

22) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + k$

23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\mathrm{e}^x)^4} + k$

24) $-2\cos\sqrt{x} + k$

25) $\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}x} + k$

26) $2(x+1)^{2011}(\frac{x+1}{2012} - \frac{1}{2011}) + k$

27) $-x\cos x + \mathrm{sen}\, x + k$

28) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\mathrm{sen}\, x + \cos x) + k$

29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$

31) $(-x-1)\mathrm{e}^{-x} + k$

32) $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x + k$

33) $x\,\mathrm{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + k$

34) $\frac{1}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{2}\ln\sec x + \mathrm{tg}\, x| + k$

35) $\frac{1}{2}(x + \mathrm{sen}\, x\cos x) + k$

36) $\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x - \frac{1}{5}\mathrm{sen}^5 x + k$

37) $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\mathrm{sen}\, 4x) + k$

38) $\ln|1 + \mathrm{sen}\, x| + k$

39) $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$

40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\mathrm{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}}) + k$

41) $-22\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$

42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln(1+(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + k$

43) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$

44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arcsen} x + k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$

48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + k$

49) $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$

50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$

51) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + k$

52) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}) + k$

53) $\frac{1}{b}\ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}) + k$

54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2}) + k$

56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}) + k$

57) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k$

58) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k$

59) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2\ln|\operatorname{sen} x| + k$

60) $\frac{1}{4}\cos^8(\frac{x}{2}) - \frac{1}{3}\cos^6(\frac{x}{2}) + k$

61) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + k$

62) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + k$

63) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + k$

64) $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) + k$

65) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x) + k$

66) $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x + k$

67) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{cotg}(2x) + k$

68) $\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k$

69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$

70) $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{3}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{4-x}{32(x^2+4)} + k$

71) $\frac{-\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$

72) $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) - \left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} + k$

73) $2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + \operatorname{arctg}(x-1) + k$

74) $x - \ln(1+e^x) + k$

75) $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln(x+1) + k$

76) $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3} + k$

77) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + k$

II - Aplicações da Integral Definida

1. 0.
3. $\frac{128}{105}a^3$.
4. $\ln(1+\sqrt{2})$.
5. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$.
6. πab.
7. (a) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}\pi$.
   (b) $\frac{\pi}{6}$.
   (c) $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$.
   (d) $\frac{5\pi}{6}$.
8. $\pi\left[\int_0^1 (e^x+2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1) dx\right]$
9. $\frac{32}{3}\pi$.
10. $(2\pi b)(\pi a^2)$.
11. $\pi h^2(a - \frac{h}{3})$.
12. $\operatorname{senh} 4 + \operatorname{senh} 3$.

III - Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

3. $2F(2) - \frac{26}{9}$.
5. 0.
6. $\frac{\pi}{2}$.

V - Miscelânea

2. $\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A)$.
6. $\frac{16}{3}R^3$.
7. $G'(x) = x\int_0^x e^{u^2} du$,
   $G''(x) = \int_0^x e^{u^2} du + xe^{x^2}$.
8. $6a$.
9. $a\ln(\frac{c_1}{c_0})$.
11. (a) -1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 1