Questão 3. (2,5) B

(a) Seja $f(t) = \begin{cases} [1-\text{sen}\,(4t)]^{\frac{1}{t}}, & \text{se } t \neq 0 \\ k, & \text{se } t = 0 \end{cases}$

(i) Sabendo que f é contínua, determine o valor de k.

(ii) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

b) Calcule $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+7x+3}+3x}{8x+5}$

a) $(1-\text{sen}(4t))^{1/t} = e^{1/t\,\ln(1-\text{sen}\,4t)}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\overset{\to 0}{\ln(1-\text{sen}4t)}}{\underset{\to 0}{t}} \overset{\text{L'HOP.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-4\cos(4t)}{1-\text{sen}4t} = -4$$

Logo, $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^{t\,\ln(1-\text{sen}4t)} = e^{-4}$ $(*)$

(i) f é contínua em $t=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$

Logo, por $(*)$, $\boxed{k = e^{-4}}$

(ii) Dada $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, sabemos que F é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pelo Teor. Fundamental do Cálculo). Como toda função derivável é contínua, concluímos que F é contínua em $x=0$ e, portanto, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Como $F(0)=0$, temos que $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt = 0$ e podemos usar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{F(x)}}{\underset{\to 0}{x}} \overset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} F'(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x) \underset{(*)}{=} e^{-4}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+7/x+3/x^2)}+3x}{x(8+5/x)} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-\cancel{x}\left(\overbrace{\sqrt{1+7/x+3/x^2}-3}^{-2}\right)}{\cancel{x}\,\underbrace{(8+5/x)}_{8}}$$

$$= \frac{1}{4}$$