Questão 3. (2,5) A

(a) Seja $f(t) = \begin{cases} [1 - \operatorname{sen}(3t)]^{\frac{1}{t}}, & \text{se } t \neq 0 \\ k, & \text{se } t = 0 \end{cases}$

(i) Sabendo que f é contínua, determine o valor de k.

(ii) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$.

b) Calcule $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x}{3x - 1}$

a) $(1 - \operatorname{sen} 3t)^{1/t} = e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}3t)}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen}3t)}{t} \overset{\text{L'HOP}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-3\cos 3t}{1-\operatorname{sen}3t} = -3$

Logo, $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}3t)} = e^{-3}$ (*)

(i) f é contínua em $t=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

Logo, por (*), $\boxed{k = e^{-3}}$

(ii) Se $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, sabemos que F é derivável e $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Teor. Fundamental do Cálculo).
Como toda função derivável é contínua, F é contínua em $x=0$, ou seja, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$.
Como $F(0)=0$, obtemos que $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)\,dt = 0$ e podemos usar L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} \overset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} F'(x) =$

$= \lim_{x\to 0} f(x) \underset{(*)}{=} e^{-3}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+5/x+2/x^2)} + 2x}{x(3-1/x)} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\left[\sqrt{1+5/x+2/x^2} - 2\right]}{x(3-1/x)}$

$= \frac{1}{3}$