A

Questão 2. (3,0)

Considere a função $f(x) = xe^{-5x}, x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.

(b) Determine a concavidade.

(c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico.

(d) Qual o número de soluções da equação $e^{5x} = 25x$? Justifique.

a) $f'(x) = (1-5x)\underbrace{e^{-5x}}_{>0}$

f': $+$ antes de $\frac{1}{5}$, $-$ depois de $\frac{1}{5}$

f: $\nearrow$ antes de $\frac{1}{5}$, $\searrow$ depois de $\frac{1}{5}$

- f é crescente em $]-\infty, \frac{1}{5}[$ e decrescente em $]\frac{1}{5}, +\infty[$.
- $x = \frac{1}{5}$ é ponto de máximo e $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5e}$ é o valor máximo de f.

b) $f''(x) = (25x - 10)e^{-5x}$

f'': $-$ antes de $\frac{2}{5}$, $+$ depois de $\frac{2}{5}$

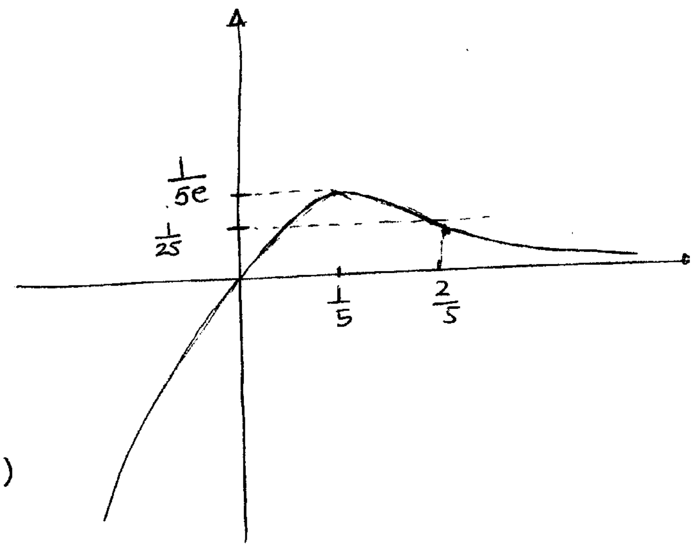
f: $\frown$ antes de $\frac{2}{5}$, $\smile$ depois de $\frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5}$ é ponto de inflexão.

$f(\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}e^{-2} = \frac{2}{5e^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{5x}} \overset{\text{L'Hopital}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5e^{5x}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{5x}} = -\infty$.



d) $e^{5x} = 25x \iff \frac{1}{25} = xe^{-5x} = f(x)$

f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular em $[0, \frac{1}{5}]$. $f(0) = 0$ e $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5e}$. Como $0 < \frac{1}{25} < \frac{1}{5e}$, $\frac{1}{25} \in \operatorname{Im} f$. Como f é crescente em $[0, \frac{1}{5}]$, Há exatamente uma solução da equação no intervalo $[0, \frac{1}{5}]$. Além disso, f é (estritamente) decrescente em $[\frac{1}{5}, +\infty[$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Logo, há exatamente mais uma solução em $[\frac{1}{5}, +\infty[$.

(Conclusão: a equação tem exatamente 2 soluções.)