Escola Politécnica da USP - 2010

MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

Prova Substitutiva - 29/06/2010

A e B

Turma: ____________

Nome: ______________________________

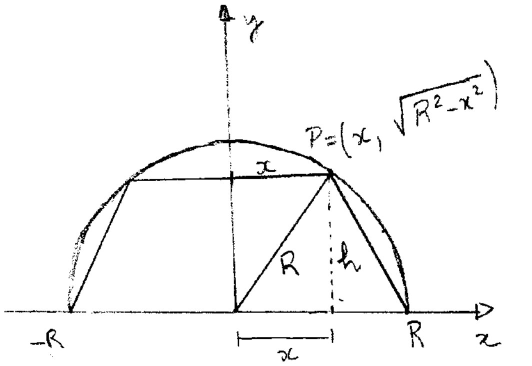
Nº USP: ______________________________

Professor: ______________________________

Justifique todas as suas afirmações.

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Questão 1. (2,0) Dentre todos os possíveis trapézios que podem ser inscritos em um semicírculo de raio R de modo que a base maior do trapézio coincida com o diâmetro do semicírculo, qual o de maior área?



Consideremos, num sistema cartesiano, a circunferência de equação $x^2+y^2=R^2$. $y=\sqrt{R^2-x^2}$ é a ordenada do ponto P indicado na figura e, portanto, a altura do trapézio de base maior $2R$ e base menor $2x$, conforme a figura.

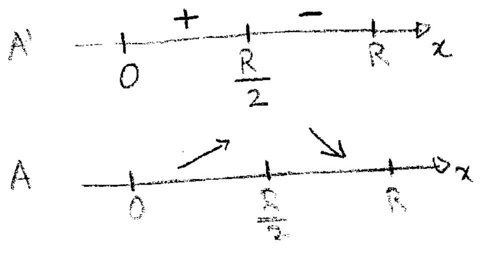
A área de tal trapézio é dada pela função

$$A(x) = \frac{2R+2x}{2}\cdot\sqrt{R^2-x^2} = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}, \quad (0\le x\le R)$$

A é uma função contínua, definida em um intervalo fechado. Logo, pelo Teorema de Weierstrass, admite um máximo.

$$A'(x) = \sqrt{R^2-x^2} + (R+x)\frac{(-x)}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-2x^2-Rx+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Como o denominador é positivo para $x \neq R$, basta analisar o sinal do numerador.



Logo, $x=\frac{R}{2}$ é ponto de máximo de A.

O trapézio de área máxima tem base menor igual a $2\cdot\frac{R}{2}=R$ e altura $R\frac{\sqrt{3}}{2}$.