**B**

**1.** Calcule:

a) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ b) $\lim_{t\to 0}(\cos(t))^{\frac{1}{t^2}}$

a) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x\ln x - x + 1}^{\to 0}}{\underbrace{(x-1)}_{0}\underbrace{\ln x}_{0}} \overset{L'Hop}{=}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \left(\frac{x-1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} \overset{L'Hop}{=}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $(\cos t)^{1/t^2} = e^{\frac{1}{t^2}\ln(\cos t)}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos t)}{t^2} \overset{L'Hop}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{2t} = \lim_{t\to 0} -\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{1}{2\cos}$

$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$ (fundamental)

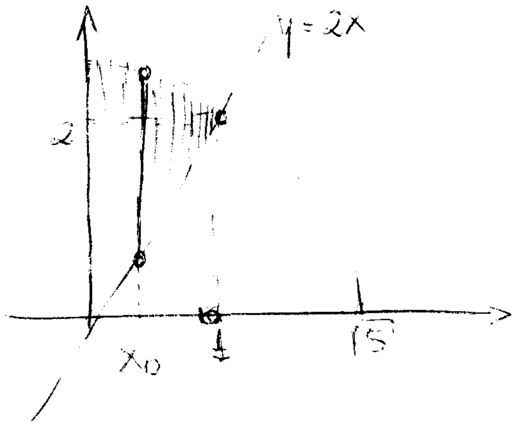
$= \boxed{-1/2}$

Logo, $\boxed{\lim_{t\to 0}(\cos t)^{1/t^2} = e^{-1/2}}$

**B**

**2.** Um sólido tem como base a região $\mathcal{R}$ descrita abaixo. As seções perpendiculares ao eixo $x$ são quadrados. Determine o volume do sólido.

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } 2x \leq y \leq \sqrt{5-x^2}\right\}$$




Seção perpendicular ao eixo $x$, no ponto $x = x_0$ é um quadrado de lado

$$\sqrt{5-x_0^2} - 2x_0$$

Logo, o volume do sólido é

$$V = \int_0^1 \left(\sqrt{5-x^2} - 2x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(5 - x^2 - 4x\sqrt{5-x^2} + 4x^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(5 + 3x^2 - 4x\sqrt{5-x^2}\right) dx = 5x + x^3 + \frac{4}{3}\left(5-x^2\right)^{3/2} \Big]_0^1$$

$$= 5 + 1 + \frac{4}{3} \cdot 4^{3/2} - \frac{4}{3} \cdot 5^{3/2} = \frac{50 - 20\sqrt{5}}{3}$$

**B**

**3.** Calcule:

a) $\int e^{2x}\cos(e^x)dx$

b) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$

a) $e^x = u$

$e^x dx = du$

$$\int e^{2x}\cos(e^x)\,dx = \int \underset{f}{u}\ \underset{g'}{\cos u}\,du$$

$$= u\,\text{sen}\,u - \int \text{sen}\,u\,du = u\,\text{sen}\,u + \cos u + k$$

$$= e^x\,\text{sen}\,e^x + \cos e^x + k,\quad k\in\mathbb{R}$$

b) $x = 2\,\text{tg}\,t \qquad t\in\,]-\pi/2, \pi/2[$

$dx = 2\sec^2 t\,dt$

$\sqrt{4+4\text{tg}^2 t} = 2\sqrt{1+\text{tg}^2 t} = 2\sec t$

OBS: A substituição $u = 4+x^2$ é mais fácil.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 2 \Rightarrow t = \pi/4$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{8\,\text{tg}^3 t\ 2\sec^2 t}{2\sec t}dt =$$

$$\int_0^{\pi/4} 8(\sec^2 t - 1)\,\text{tg}\,t\,\sec t\,dt = 8\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,\sec t\,\text{tg}\,t\,dt -$$

$$8\int_0^{\pi/4} \text{tg}\,t\,\sec t\,dt = 8\left[\frac{\sec^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/4} - \sec t\Big]_0^{\pi/4}\right] =$$

**B**

4. Seja $f$ uma função derivável tal que $2y = 3x + 2$ é a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-2, f(-2))$. Seja

$$g(x) = f\left(\frac{6-2x}{x^2-3}\right).$$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abscissa igual a 1.

$x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{3(-2)+2}{2} = -2$

Logo, $f(-2) = -2$ e $f'(-2) = \dfrac{3}{2}$

$g(1) = f\left(\dfrac{4}{-2}\right) = f(-2) = -2$

$g'(x) = f'\left(\dfrac{6-2x}{x^2-3}\right) \cdot \left[\dfrac{-2(x^2-3) - 2x(6-2x)}{(x^2-3)^2}\right]$

$g'(1) = f'(-2) \cdot \left[\dfrac{-2(-2) - 2 \cdot 4}{4}\right] = -\dfrac{3}{2}$

Equação da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto $(1, -2)$ é:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x-1)$$

**5.** Considere o polinômio $f(x) = -x^5 - 10x^2 + 5x + 4$.

a) Faça um esboço do gráfico de $f'$.

b) Determine o número de raízes reais do polinômio $f$.

a) $f(x) = -x^5 - 10x^2 + 5x + 4$
$f'(x) = -5x^4 - 20x + 5$
$f''(x) = -20x^3 - 20 = -20(x^3+1)$

| | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $\uparrow$ | | $\downarrow$ |
| $f''$ | $+$ | | $-$ |

$f'(-1) = 20$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

$f'(0) = 5$

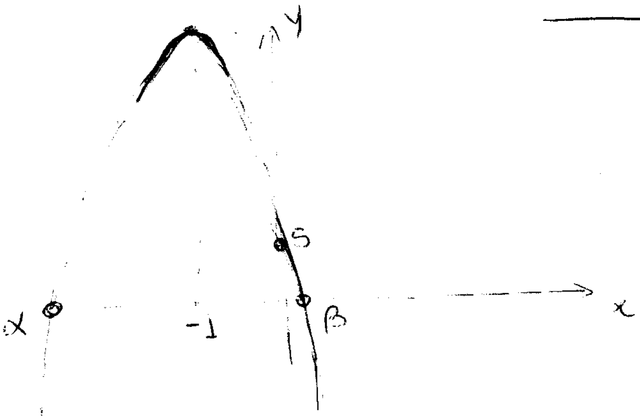



gráfico de $f'$

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

e

$\alpha < -1 < 0 < \beta$

b) Analisando o sinal de $f'$, concluimos que $f$ é decrescente em $]-\infty, \alpha[$ e em $]\beta, +\infty[$ e é crescente em $]\alpha, \beta[$.

A forma do gráfico de $f$ é  com $x = \alpha$ ponto de mínimo e $x = \beta$, ponto de máximo.

Logo, $f$ tem no máximo, três raízes reais distintas

Como $f(-1) = -10$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, temos que $f$ tem uma raiz no intervalo $]-\infty, -1[$ (Teor Valor Interm

Como $f(-1) = -10$ e $f(0) = 4$, sabemos que $f$ tem uma raiz em $]-1, 0[$ (Teor. do Valor Intermediário)

Como $f(0) = 4$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, sabemos que $f$ tem uma raiz em $]0, +\infty[$.

Logo, $f$ tem exatamente 3 raízes reais distintas