

3. Considere a função $g(x) = \int_0^{2\text{sen}(x)} [3 + \cos(t^2)] dt$ definida em \mathbb{R} .

(1,0) a) Calcule $g'(x)$.

(1,0) b) Seja $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{x^2}{\sqrt{4+t^4}} dt$. Calcule $f'(\pi)$.

Solução:

a) Usando o segundo teorema fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{2\text{sen}(x)} [3 + \cos(t^2)] dt \right) \\ &= [3 + \cos(4\text{sen}^2(x))] (2\cos(x)) \end{aligned}$$

b) Novamente, pelo segundo teorema fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{g(x)} \frac{x^2}{\sqrt{4+t^4}} dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} dt \right) \\ &= 2x \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} dt + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{4+(g(x))^4}} \right) g'(x) \end{aligned}$$

Fazendo $x = \pi$ na expressão acima e observando que $g(\pi) = 0$, obtemos

$$f'(\pi) = \pi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-8) = -4\pi^2$$