3. Considere a função $g(x) = \int_0^{2\cos(x)} [3 + \text{sen}(t^2)]dt$ definida em $\mathbb{R}$.

(1,0) a) Calcule $g'(x)$.

(1,0) b) Seja $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{x^2}{\sqrt{4+t^4}}dt$. Calcule $f'(\pi/2)$.

Solução:

a) Usando o segundo teorema fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(\int_0^{2\cos(x)} [3 + \text{sen}(t^2)]dt) \\ &= \left[3 + \text{sen}(4\cos^2(x))\right](-2\text{sen}(x)) \end{aligned}$$

b) Novamente, pelo segundo teorema fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} \frac{x^2}{\sqrt{4+t^4}}dt\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dt\right) \\ &= 2x\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dt + x^2(\frac{1}{\sqrt{4+(g(x))^4}})g'(x) \end{aligned}$$

Fazendo $x = \pi/2$ na expressão acima e observando que $g(\pi/2) = 0$, obtemos

$$f'(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) = -\frac{3\pi^2}{4}$$