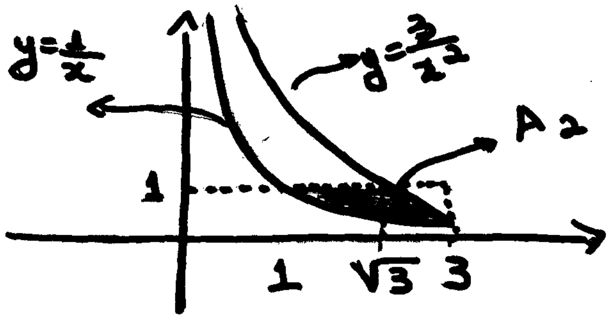
3. (a) **(1,5)** Calcule a área da região

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x^2}\right\}$$

$\frac{1}{x} = \frac{3}{x^2} \iff x = 3$

$0 < x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$

$3 < x \Rightarrow \frac{3}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



$(x>0 \text{ e } \frac{1}{x} \leq 1) \iff x \geq 1$

$(x>0 \text{ e } \frac{3}{x^2} \leq 1) \iff x \geq \sqrt{3}$

$A_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x\Big|_1^{\sqrt{3}} - \ln x\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3} + \ln 1$

$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$

$A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-3}{x}\Big|_{\sqrt{3}}^{3} - \ln x\Big|_{\sqrt{3}}^{3}$

$A_2 = -1 + \frac{3}{\sqrt{3}} - \ln 3 + \ln\sqrt{3}$

$A_2 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$

$A_1 + A_2 = 2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})$

$\boxed{\text{Resposta: } 2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})}$ (ou $2\sqrt{3} - 2 - \ln 3$)

(b) Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$.

i. **(1,0)** Quantas raízes reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$?

ii. **(0,5)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais distintas. **Mencione os teoremas utilizados.**

i) $f'(x) = 7x^6 + 3\pi x^2 - 16x + e$

$f''(x) = 42x^5 + 6\pi x - 16$ $\quad f'''(x) = 210x^4 + 6\pi$

Como $f'''(x) > 0$ para todo x, f'' é estritamente crescente e portanto a equação $f''(x) = 0$ tem, no máximo, uma raiz real. Mas $f''(0) = -16 < 0$ e $f''(1) = 42 + 6\pi - 16 > 60 - 16 > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c em $]0,1[$ tal que $f''(c) = 0$. Assim, a equação $f''(x) = 0$ tem uma (e apenas uma) raiz real.

ii) $f(-1) = -1 - \pi - 8 - e + 1 = -\pi - 8 - e < 0$ pois $e + \pi < 6 < 8$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = 1 + \pi - 8 + e + 1 = 2 + e + \pi - 8 < 2 + 6 - 8 < 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^7\left(1 + \frac{\pi}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{e}{x^6} + 1\right) = +\infty$$ e

portanto existe $M > 1$ tal que $f(M) > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, três raízes reais distintas x_1, x_2, x_3, com $-1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < M$. Vamos mostrar que a equação $f(x) = 0$ não pode ter mais do que três raízes reais distintas. Em i), vimos que f'' se anula apenas em um ponto. Aplicando o TVM para f', concluímos que f' se anula, no máximo, duas vezes (De fato, se existissem a, b e c com $a < b < c$ tais que $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ então f'' se anularia uma vez em $]a,b[$ e uma vez em $]b,c[$ e, portanto, se anularia pelo menos duas vezes) Aplicando o TVM novamente, desta vez para f, concluímos que f se anula, no máximo, três vezes, já que f' se anula, no máximo duas vezes.

Observação: f, f', f'' são deriváveis em $\mathbb{R}$ e portanto, são contínuas em $\mathbb{R}$. Assim f, f', f'' verificam as hipóteses do T.V.I. e do T.V.M. em qualquer intervalo $[a,b]$.