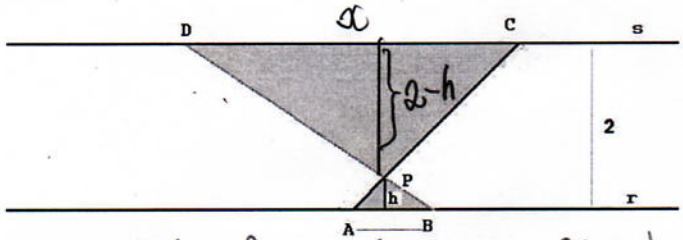
2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova A.

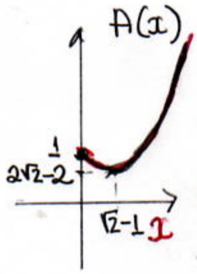
Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante a ABP, temos que $\boxed{\frac{x}{1} = \frac{2-h}{h}}$. Logo $xh = 2-h \Rightarrow h(1+x) = 2$ $\boxed{h = \frac{2}{1+x}}$

A soma das áreas dos triângulos DCP e ABP é

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h}{2}.$$

Escrevendo A em função de x temos

$$A(x) = \frac{1}{2}\left[2x - \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{1+x}\right] = x - \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}.$$



Temos então que analisar a função $A(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$. (Aqui $x = 0$ tem o sentido de $C = D = P$.)

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(x - \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 0}\Big) = +\infty \quad \text{e} \quad A(0) = 1$$

Agora $A'(x) = 1 - \frac{[(1+x) - x]}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$.

Analisando o sinal de $A'(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$ temos

	0		$-1+\sqrt{2}$	
$A'(x)$		$- - -$		$+ + + +$
$A(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Logo $x = -1+\sqrt{2}$ é ponto de mínimo de $A(x)$. A função $A(x)$ não tem máximo, pois $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$. Quando $x = -1+\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, a soma das áreas é MÍNIMA. Não tem máximo.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}}$$

Temos que $(1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}\ln(1+2x)}$.

Seja $u = u(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln(1+2x)}^{\to 0}}{\underbrace{\operatorname{arctg}(3x)}_{\to 0}} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\frac{2}{1+2x}}^{\to 2}}{\underbrace{\frac{3}{1+9x^2}}_{\to 3}} = \frac{2}{3}$$

Como a exponencial é uma função contínua,

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = \lim_{u\to 2/3} e^u = \underline{\underline{e^{2/3}}}.$$