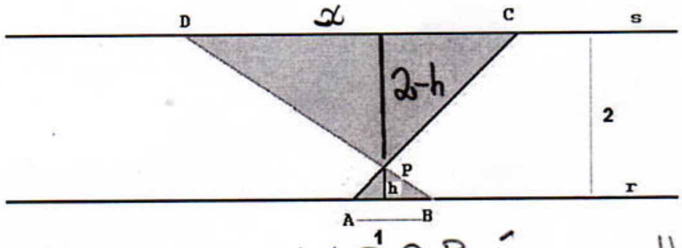
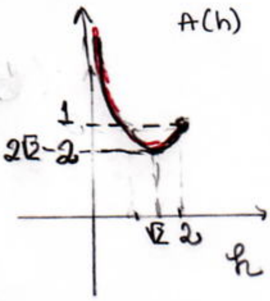
2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova B.

Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante ao triângulo ABP, temos que

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{2-h}{h}}.$$



A soma das áreas dos dois triângulos é:

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h \cdot 1}{2}.$$

Escrevendo a área em função de h, temos:

$$A(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-h)^2}{h} + h\right] = \frac{2}{h} - 2 + h.$$

Vamos então analisar a função $A(h)$ no intervalo $]0, 2]$. (h=2 significa D = C = P)

$$\lim_{h \to 0^+} A(h) = \lim_{h \to 0^+}\left(\frac{2}{h} - 1 + h\right) = +\infty, \quad A(2) = 1.$$

$$A'(h) = -\frac{2}{h^2} + 1 = \frac{-2 + h^2}{h^2}.$$

$A'(h)$: 0 $- \; -$ $\sqrt{2}$ $+ \; + \; + \; + \; +$ 2

$A(h)$: 0 $\searrow$ $\sqrt{2}$ $\nearrow$ 2

Da análise acima temos que quando $h = \sqrt{2}$ a soma das áreas é mínima. Como $\lim_{h \to 0^+} A(h) = +\infty$, não temos ponto de máximo de $A(h)$. Assim, a soma das áreas é MÍNIMA quando $h = \sqrt{2}$ e NÃO tem MÁXIMO.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}}$$

$$(1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)} \ln(1+3x)}$$

Seja $u = \dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{arctg}(2x)}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+3x) \to 0}{\operatorname{arctg}(2x) \to 0} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{1+3x} \to 3}{\frac{2}{1+4x^2} \to 2} = \frac{3}{2}.$$

Como função exponencial é contínua, temos que

$$\lim_{x \to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}} = \lim_{u \to 3/2} e^u = \underline{e^{3/2}}.$$