1. **(3,5)** Seja $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

   (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   (b) Verifique que $f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2x^2-4x+a}{x^5}\right)$. Determine a e estude a concavidade de f.

   (c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} + e^{-1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$$

$f'(x)=0$ se $x=1$

		0		1	
$1-x$	$+$	‖	$+$		$-$
x^3	$-$	‖	$+$		$+$
f'	$-$	‖	$+$		$-$
f	↘	‖	↗		↘

f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $[1,+\infty[$

f é estritamente crescente em $]0,1]$.

$\left(1,\frac{1}{e}\right)$ é ponto de máximo local

b) $$f''(x) = e^{-1/x}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) + e^{-1/x}\left(-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{2x^3-4x+1}{x^5}\right)$$ $\boxed{a=1}$

$f''(x)=0$ se $2x^2-4x+1=0$ $\therefore\ x = 1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

		0		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^3-4x+1$	$+$	‖	$+$		$-$		$+$
x^5	$-$	‖	$+$		$+$		$+$
f''	$-$	‖	$+$		$-$		$+$
f	$\cap$	‖	$\cup$		$\cap$		$\cup$

f tem concavidade para baixo em $]-\infty,0[$ e em $]1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}[$

f tem concavidade para cima em $]0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e em $]1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$.

$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{2e^{\frac{2}{\sqrt{2}-2}}}{2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{2e^{\frac{-2}{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x}}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-1/x}}{x}$$ $\left(\text{pois } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} \text{ e } \lim_{x\to+\infty}e^{-1/x}=1=\lim_{x\to-\infty}e^{-1/x}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x}}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+}e^{-1/x} = 0.$$