

MAT2453- Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I - POLI

1º Semestre de 2010 - 3ª Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

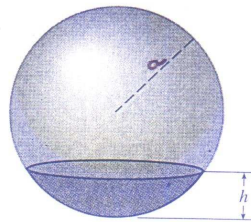
1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$
2. $\int e^{2x} dx$
3. $\int \cos 7x dx$
4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
5. $\int \frac{7}{x-2} dx$
6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$
7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
8. $\int \operatorname{tg} x dx$
9. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$
10. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
12. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
13. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$
14. $\int \sec x dx$
15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$
16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$
17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$
18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$
19. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$
20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$
22. $\int e^{x^3} x^2 dx$
23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$
24. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$
26. $\int 2x(x+1)^{2010} dx$
27. $\int x \operatorname{sen} x dx$
28. $\int e^x \cos x dx$
29. $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$
30. $\int (\ln x)^2 dx$
31. $\int x e^{-x} dx$
32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$
33. $\int \operatorname{arcsen} x dx$
34. $\int \sec^3 x dx$
35. $\int \cos^2 x dx$
36. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$
37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$
38. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$
39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$
40. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$
41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$
42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$
43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
44. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
45. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$ 48. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
49. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$ 50. $\int \frac{x}{x^2-4} dx$ 51. $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$
52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2} dx$ 53. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$ 54. $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx$
55. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$ 56. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 57. $\int \cos^3 x dx$
58. $\int \operatorname{sen}^5 x dx$ 59. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$ 60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$
61. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}$ 62. $\int \operatorname{sen}^4 x dx$ 63. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x dx$
64. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx$ 65. $\int \cos^6(3x) dx$ 66. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} dx$
67. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$ 68. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ 69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}$
(Sugestão: faça $u = \sqrt[6]{x}$)
70. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$ 71. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ 72. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} dx$
73. $\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} dx$ 74. $\int \frac{dx}{1+e^x}$ 75. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$
76. $\int x^5 e^{-x^3} dx$ 77. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$

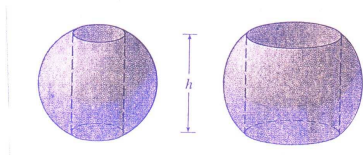
II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2+1) dx$.
2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h .
3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.
4. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$.
5. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
6. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
7. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$.

8. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$.
10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.
11. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x + 1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.
12. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.
13. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h , $h \leq a$, de uma esfera de raio a .



14. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.
15. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , prove o fato notável de que o volume do anel depende de h , mas não de R .



III - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$, isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a, b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

3. Calcule $g'(x)$ onde

$$(a) g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt \quad (b) g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

4. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$ em termos de $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$.

5. *Trabalho*. Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d , definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x , sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

6. *Energia cinética*. Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2 . Em Física, a expressão $\frac{1}{2} m v^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v . Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

7. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\vec{i}$, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v , segundo a função $m : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} (m(x'(t))x'(t)) = f(x(t)).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE , e se $\Delta m = m(x'(t_1)) - m(x'(t_0))$, então:

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

8. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t) dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

9. Determine o volume da intersecção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais.

10. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3} dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x)dx$ em termos de $F(2)$.

11. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\int_0^x e^{-t^2} dt}$.

12. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?

13. Mostre que $\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$.

14. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e ímpar.

(b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x .)

(c) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

(d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

15. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Estude as integrais de Riemann impróprias:

(a) $\int_0^1 f(x) dx$ (b) $\int_1^\infty f(x) dx$

16. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Seja $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1} dt$.

(a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x - 2)}$

IV - Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

(a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que: a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3$ para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

b) Avalie $\operatorname{sen}(1)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5} .

c) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) \right| \leq \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

d) Avalie $\int_0^1 e^{x^2}$ com erro inferior a 10^{-5} .

6. Mostre que $\left| \int_0^1 \cos(x^2) dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!} \right) \right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até 2ª ordem em I . Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o “teste da segunda derivada”, isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e

a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a .

b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a .

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$ | 2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$ |
| 3) $\frac{1}{7}\text{sen } 7x + k$ | 4) $\text{tg } x - x + k$ |
| 5) $7 \ln x - 2 + k$ | 6) $\frac{1}{4}\text{tg}^4 x + k$ |
| 7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1) + k$ | 8) $-\ln \cos x + k$ |
| 9) $\frac{1}{2}\text{tg}^2 x + \ln \cos x + k$ | 10) $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$ |
| 11) $\frac{1}{2} \text{arctg } x^2 + k$ | 12) $x - \text{arctg } x + k$ |
| 13) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3} + k$ | 14) $\ln \sec x + \text{tg } x + k$ |
| 15) $2\sqrt{1 + \ln x} + k$ | 16) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 + 1)^6} + k$ |
| 17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$ | 18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$ |
| 19) $\ln \arcsen x + k$ | 20) $\ln(1 + e^x) + k$ |
| 21) $-\ln(1 + \cos^2 x) + k$ | 22) $\frac{1}{3}e^{x^3} + k$ |
| 23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + e^x)^4} + k$ | 24) $-2 \cos \sqrt{x} + k$ |
| 25) $e^{\text{arctg } x} + k$ | 26) $2(x + 1)^{2011}(\frac{x+1}{2012} - \frac{1}{2011}) + k$ |
| 27) $-x \cos x + \text{sen } x + k$ | 28) $\frac{1}{2}e^x(\text{sen } x + \cos x) + k$ |
| 29) $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, & \text{se } r = -1 \end{cases}$ | 30) $x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + k$ |
| 31) $(-x - 1)e^{-x} + k$ | 32) $\frac{x^2}{2} \text{arctg } x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \text{arctg } x + k$ |
| 33) $x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + k$ | 34) $\frac{1}{2} \sec x \text{tg } x + \frac{1}{2} \ln \sec x + \text{tg } x + k$ |
| 35) $\frac{1}{2}(x + \text{sen } x \cos x) + k$ | 36) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + k$ |
| 37) $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\text{sen } 4x) + k$ | 38) $\ln 1 + \text{sen } x + k$ |
| 39) $6 \ln x - 1 - 25 \ln x - 2 + 22 \ln x - 3 + k$ | 40) $\frac{\sqrt{6}}{12} \text{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}}) + k$ |
| 41) $-22 \ln x - 1 + \frac{12}{x-1} + 25 \ln x - 2 + k$ | |
| 42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln x - 2 + \frac{61}{24} \ln(1 + (\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12} \text{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + k$ | |
| 43) $\frac{1}{2} \arcsen x - \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + k$ | 44) $\frac{x}{8}(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8} \arcsen x + k$ |
| 45) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + k$ | 46) $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + k$ |

