

# MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

## 1º Semestre de 2010 - 2ª Lista de Exercícios

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \text{ e } g(x) = -x + 1,$$

com  $-1 \leq x \leq 1$ .

2. Desenhe a região  $A = B \cap C \cap D$  e calcule a área de  $A$ , onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 4\}, C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 12 - 3x^2\} \text{ e}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 3x^2 + 12x + 12\}.$$

3. Desenhe a região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$$

e calcule a sua área.

4. Sejam  $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com  $f(x) \leq 0$ , para todo  $x \in [-1, 3]$ ,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$

tais que a área de  $A \cap B$  seja igual a 23. Calcule  $\int_{-1}^3 f(x) dx$ .

5. Determine  $m > 0$  para que a área delimitada por  $y = x^2$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$  e a reta  $y = mx$  seja igual a 4.

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva  $y = x^3 - x$  e por sua reta tangente no ponto de abscissa  $x = -1$ . Calcule a área desta região.

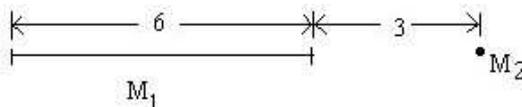
7. Encontre a área da região limitada entre as curvas  $x = y^3 - y$  e  $x = 1 - y^4$ .

8. Calcule  $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2}) dx$ , interpretando-a como uma área.

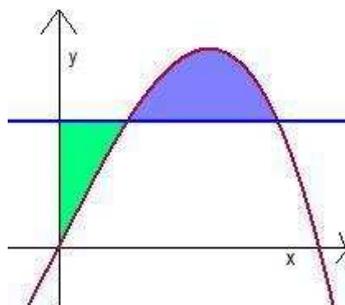
9. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde  $C$  é uma constante,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das partículas e  $d$  é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa  $M_1 = 18\text{kg}$  e uma massa pontual  $M_2 = 2\text{kg}$  estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



10. A reta horizontal  $y = c$  intercepta a curva  $y = 2x - 3x^3$  no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine  $c$  para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



11. Sejam  $y = f(x)$  dada por  $f(x) = x^3 + \ln x$ ,  $x > 0$  e  $x = g(y)$  sua função inversa. Calcule  $g'(y)$  em termos de  $g(y)$ . Calcule  $g'(1)$ .

12. Seja  $h(x) = 2x + \cos x$ .

- (a) Mostre que  $h$  é bijetora.  
 (b) Calcule  $h^{-1}(1)$ .  
 (c) Admitindo  $h^{-1}$  derivável, determine  $(h^{-1})'(1)$ .

13. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

- (a)  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$       (b)  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$       (c)  $f(x) = e^{e^x}$   
 (d)  $f(x) = x^e + e^x$       (e)  $f(x) = e^{1/x^2} + \frac{1}{e^{x^2}}$       (f)  $f(x) = \ln(e^x + 1)$   
 (g)  $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$       (h)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$       (i)  $f(x) = x^\pi + \pi^x$   
 (j)  $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$       (k)  $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$       (l)  $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\sin x}$   
 (m)  $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$       (n)  $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$       (o)  $f(x) = \frac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$   
 (p)  $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$       (q)  $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$       (r)  $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$   
 (s)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

14. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

- (a)  $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \geq 1$  e  $b \geq 1$ .  
 (c)  $|\ln \frac{a}{b}| \leq |a - b|$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \geq 1$  e  $b \geq 1$ .  
 (d)  $b^b - a^a > a^a(b - a)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq a < b$ .  
 (e)  $e^x - e^y \geq x - y$ , para todos  $x, y$  com  $x \geq y \geq 0$ .

15. Seja  $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$  e seja  $g$  a sua inversa. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Mostre que

$$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

16. Seja  $f$  uma função derivável no intervalo  $] -1, +\infty[$ . Mostre que se  $f(0) = 0$  e  $0 < f'(x) \leq 1$ , para todo  $x > 0$ , então  $0 < f(x) \leq x$ , para todos  $x > 0$ .

17. Mostre que  $f(x) = (1+x)^{1/x}$  é estritamente decrescente para  $x > 0$ . Conclua que

$$(1+\pi)^e < (1+e)^\pi.$$

18. Prove as seguintes desigualdades:

(a)  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ , para todo  $x > 1$

(b)  $e^\pi > \pi^e$

(c)  $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \frac{b}{a}$  para  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d)  $x - \frac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ , para  $x > 0$

(e)  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ , para  $x > 0$

(f)  $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$ , para  $x > 0$

19. Seja  $f$  derivável em  $\mathbb{R}$  e seja  $g$  dada por  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Suponha que  $x_0$  é ponto de máximo local de  $g$ . Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Prove que a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$  passa pela origem.

20. Determine a constante  $a$  para que  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  tenha:

(a) um mínimo local em  $x = 2$ .

(b) um mínimo local em  $x = -3$ .

(c) Mostre que  $f$  não terá máximo local para nenhum valor de  $a$ .

21. Calcule, caso exista

(a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^{x^2}}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x$ ,  $p > 0$

(h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left( \frac{p}{x} \right)$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} + \ln x \right]$

(o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$

(q)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$

(r)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \operatorname{sec} x - \operatorname{sec}^2 x)$

(t)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln 2 / (1 + \ln x)}$

(u)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 3x)^{1/\ln x}$

(v)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(w)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4} \right]$

22. Determine  $c$  para que a função  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$  tenha uma única raiz real.

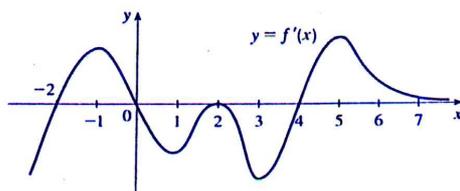
23. Mostre que a equação  $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$  tem exatamente uma raiz real.

24. Seja  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{ax-1}{ax+1} \right)^x = 4$ . Determine  $a$ .

25. (a) Esboce o gráfico de  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

(b) Determine, em função de  $k$ , o número de soluções reais da equação  $ke^x = x^2$ .

26. Seja  $f$  uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



- (a) Em que intervalos  $f$  é crescente ou decrescente?  
 (b) Para quais valores de  $x$   $f$  tem um máximo ou mínimo local?  
 (c) Em que intervalos  $f$  tem concavidade para cima ou para baixo?  
 (d) Ache os pontos de inflexão de  $f$ .  
 (e) Admitindo que  $f(0) = 0$ , faça um esboço do possível gráfico de  $f$ .
27. (a) Ache o ponto de mínimo de  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  no intervalo  $]0, +\infty[$ .  
 (b) Prove que  $\frac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$ , para todos  $a > 0$  e  $b > 0$ .
28. Seja  $f$  uma função. Se existir uma reta  $y = mx + n$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ , dizemos que  $y = mx + n$  é uma **assíntota** para  $f$ . Prove que a reta  $y = mx + n$  é uma assíntota para  $f$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n$ . (Tudo o que dissermos para  $x \rightarrow +\infty$  vale também para  $x \rightarrow -\infty$ .)
29. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.
- |   |                                    |   |
|---|------------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$             | (b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$   | (c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$                |
| (d) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$    | (e) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$ | (f) $f(x) = (3 - \frac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$ |
| (g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$        | (h) $f(x) = e^x - e^{3x}$          | (i) $f(x) = x - 3 \ln x - \frac{2}{x}$        |
| (j) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$            | (k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$    | (l) $f(x) = x^x$                              |
| (m) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$    | (n) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$  | (o) $f(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2}$              |
| (p) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ | (q) $f(x) = \arctg(\ln x)$         | (r) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$          |
| (s) $f(x) = x^2 \ln x$                  | (t) $f(x) = \frac{e^x}{x}$         | (u) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$                |
30. Achar os valores máximo e mínimo de:
- (a)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .  
 (b)  $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ .  
 (c)  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ ,  $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ .  
 (d)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ .  
 (e)  $f(x) = |x^4 - 2x^3|$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .

31. Para que números positivos  $a$  a curva  $y = a^x$  corta a reta  $y = x$ ?
32. Seja  $f(x)$  um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que  $f$  tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.
33. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(a) = f(b) = 0$ . Mostre que se  $f'(a)f'(b) > 0$ , então existe  $c$  entre  $a$  e  $b$  tal que  $f(c) = 0$ .
34. Para que valores de  $k$  a equação  $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$  tem três raízes reais distintas ?
35. Suponha que  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua,  $f(0) = 1$  e que  $f(x)$  é um número racional para todo  $x \in [0, 1]$ . Prove que  $f(x) = 1$ , para todo  $x \in [0, 1]$ .
36. Seja  $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$ . Prove que  $f'(x)$  tem duas raízes distintas no intervalo  $] -1, 1[$ .
37. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável e seja  $a \in \mathbb{R}$  fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

(a) Se  $f'(x) > 0$ , para todo  $x > a$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(b) Se  $f$  é derivável até segunda ordem com  $f'(x) > 0$  e  $f''(x) > 0$ , para todo  $x > a$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(c) Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ .

(d) Se existe uma assíntota para  $f$  (quando  $x \rightarrow +\infty$ ) com coeficiente angular  $m$  e se existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ , então  $L = m$ .

(e) Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$  então  $f$  tem uma assíntota com coeficiente angular igual a  $m$ .

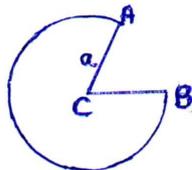
38. Suponha que  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e que  $0 \leq f(x) \leq 1$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Prove que existe  $c \in [0, 1]$  tal que  $f(c) = c$ .
39. Prove que se  $p$  é um polinômio, a equação  $e^x - p(x) = 0$  não pode ter infinitas soluções reais.
40. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e com um único ponto crítico  $x_0$ . Prove que se  $x_0$  for ponto de mínimo (máximo) local de  $f$ , então  $x_0$  será o único ponto de mínimo (máximo) global de  $f$ .
41. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

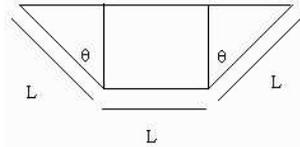
quando  $x \rightarrow a$ ,  $a > 0$ . Calcule este limite.

42. Considere a parábola  $y = bx^2$  com  $b \geq 1$ .
- (a) Determine, em termos de  $b$ , a área da região compreendida entre essa parábola e a reta  $y = x$ , para  $x \in [0, 1]$ .
- (b) Determine  $b \in [1, 3]$  de modo que a área seja máxima. Justifique!
43. Para que pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 25$  a soma das distâncias a  $(2,0)$  e  $(-2,0)$  é mínima?
44. Achar os pontos da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  mais próximos de  $(0,1)$ .
45. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio  $R$ . Se  $x$  é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando  $x = 3R$ .

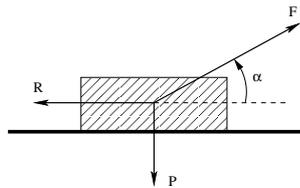
46. Qual é o menor valor da constante  $a$  para o qual a desigualdade  $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$  é válida para todo número positivo  $x$ ?
47. Seja  $f(x) = 5x^2 + \frac{a}{x^5}$ ,  $x > 0$ , onde  $a > 0$ . Ache o menor valor de  $a$  de modo que  $f(x) \geq 28$ ,  $\forall x > 0$ .
48. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo  $x$ , onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?
49. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume  $V$  especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?  
 (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume  $V$  que minimiza o custo do material utilizado.
50. Um arame de comprimento  $L$  deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é  $2/3$  da altura do triângulo.
51. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação  $\theta$ . Seja  $r$  o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então  $r$  é dado por  $r = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta$ , onde  $v$  e  $g$  são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?
52. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.
53. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.
54. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?
55. Um papel de filtro circular de raio  $a$  deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas  $CA$  e  $CB$ . Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



56. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade.



57. Um corpo de peso  $P$  apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade  $F$ . Qual o ângulo  $\alpha$  com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito  $\mu > 0$  ?

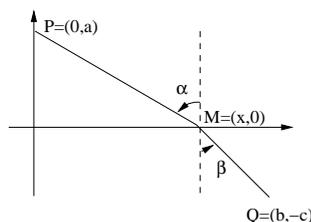


OBSERVAÇÃO. Para cada  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  fixo, o valor mínimo da força  $F$  para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de  $F$  e a força de atrito  $R$  seja positiva, i.e.  $F \cos \alpha - \mu(P - F \sin \alpha) \geq 0$ , ou seja,  $F \geq \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$ .

58. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como consequência do *princípio de Fermat*, segundo o qual “a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso”.

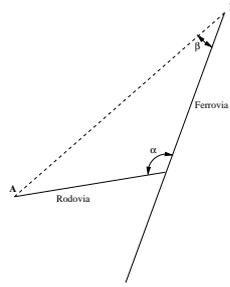
Sejam  $P \in \mathbb{R}^2$  um ponto no semi-plano superior e  $Q \in \mathbb{R}^2$  um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de  $P$  a um ponto  $M = (x, 0)$  sobre o eixo  $Ox$  com velocidade constante  $u$  e movimento retilíneo; em seguida, vai de  $M$  até  $Q$  com velocidade constante  $v$ , também em movimento retilíneo. Seja  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(x)$  é o tempo de percurso de  $P$  a  $Q$ . Mostre que  $T$  possui um único ponto de mínimo  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Verifique que  $x_0 \in (0, b)$  e que, se  $x = x_0$ , então  $\frac{\sin \alpha}{u} = \frac{\sin \beta}{v}$ .



OBSERVAÇÃO. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como consequência do mesmo princípio (verifique!).

59. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica  $A$  a uma ferrovia que passa por uma cidade  $B$ . Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam  $m$  vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo  $\alpha$  a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma  $m > 1$ .



60. Um corredor de largura  $a$  forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura  $b$ . Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

### Respostas

1.  $\frac{1}{2}$    2.  $\frac{104}{3}$    3.  $\frac{107}{24}$    4.  $-\frac{5}{3}$    5.  $m = 2$    6.  $\frac{27}{4}$    7.  $\frac{8}{5}$    8.  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$    9.  $\frac{4}{3}C$    10.  $c = \frac{4}{9}$
11.  $g'(1) = \frac{1}{4}$    12. (b) 0; (c)  $\frac{1}{2}$    20. (a)  $a = 16$ ; (b)  $a = -54$
21. (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 1, (e) 0, (f) 0, (g) 0 (h)  $p$ , (i)  $\frac{1}{6}$ , (j) 1, (k) 1, (l)  $e^4$ , (m) 1 (n)  $+\infty$ , (o)  $\frac{2}{3}$ , (p) 1, (q)  $e^2$ , (r) 3, (s)  $-\frac{1}{2}$ , (t) 2, (u)  $e$ , (v)  $e$ , (w) 1.
22.  $c < -27$  ou  $c > 5$    24.  $a = -\frac{1}{\ln 2}$
25. Não há soluções se  $k < 0$ ; tem 1 solução se  $k = 0$  ou  $k > \frac{4}{e^2}$ ; tem 2 soluções se  $k = \frac{4}{e^2}$ ; tem 3 soluções se  $0 < k < \frac{4}{e^2}$ .
27. (a)  $x_0 = 1$
30. (a)  $-1; \sqrt{2}$    (b)  $\sqrt{\frac{17}{8}}; \sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$    (c) 4; 1   (d)  $\sqrt[3]{-3}; 0$    (e) 0; 27
31.  $a \leq e^{\frac{1}{e}}$    34.  $4 < k < 5$
37. As afirmações (b) e (d) são **verdadeiras** e (a), (c) e (e) são **falsas**.
41.  $\frac{16a}{9}$    42. (a)  $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$ ; (b)  $b = 3$
43. (5, 0) e (-5, 0)   50. (a) Deve-se formar apenas um quadrado;   54.  $(1 + \sqrt[3]{4})^{3/2}$
44.  $(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$    (b) o lado do quadrado é  $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$ .   55.  $\sqrt{2}$
46.  $a = 2$    51.  $\theta = \frac{\pi}{4}$    56.  $\theta = \frac{\pi}{6}$
47.  $a = 2^8$    52. altura: 4; raio:  $2\sqrt{2}$    57.  $\text{arctg } \mu$
48.  $\frac{\pi}{4}$    59.  $\pi - \max\{\beta, \arccos(\frac{1}{m})\}$
49. (a) 1; (b)  $4/\pi$    60.  $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$