Lista 0 de MAT 2453 - POLI - 2010

1. Você já deve ter aprendido que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Isto é, ele *não* pode ser representado por uma fração $\dfrac{p}{q}$ com p e q números inteiros e $q \neq 0$. Você sabe provar isso? Daremos aqui um esboço da demonstração. Este é um exemplo de uma *demonstração por absurdo*:
   "Suponha que existam números inteiros p e q com $q \neq 0$ e $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos supor que p e q são números *primos entre si*. Então $p^2 = 2q^2$. Logo p é par, ou seja, $p = 2k$ para algum inteiro k. Mas isto implica que $4k^2 = 2q^2$ e então $q^2 = 2k^2$. Portanto q é par. Chegamos assim a uma contradição, pois supusemos que p e q são primos entre si. Esta contradição prova a afirmação que $\sqrt{2}$ é irracional."
   Preencha todos os detalhes desta demonstração. Se p é um número primo qualquer, você é capaz de provar que $\sqrt{p}$ é irracional?

   Você sabe determinar um *número racional* r tal que $0 < \sqrt{2} - r < 10^{-5}$?

2. Resolva as inequações:
   (a) $x(2x-1)(x+1) > 0$ (b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$
   (c) $(x+1000)^2 \geq x + 1000$ (d) $|4 - x^2| \leq \dfrac{x+7}{2}$

3. Decida quais afirmaçoes são verdadeiras:
   (a) $x - 1 < 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 9$ (b) $\dfrac{x-1}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{1}{2}$
   (c) $\dfrac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$ e $x \neq 0$ (d) $(x^2-5)^2 < 4(x^2+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 2(x^2+1)$
   (e) se $x \neq 2$, $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x-2)$

4. Resolva os sistemas:
   (a) $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

5. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:
   (a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$ (c) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
   (d) $f(x) = x - |x|$ (e) $f(x) = |3x+5|$ (f) $f(x) = 3\cos(2x)$
   (g) $f(x) = \sqrt{x+3}$ (h) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi/2)$ (i) $f(x) = x^3 - 9$
   (j) $f(x) = (x+5)^4 - 3$ (k) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x+3}$ (l) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$
   (m) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9} + 2$ (n) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (o) $f(x) = \sqrt{-x}$

6. Resolva as inequações:
   (a) $|\operatorname{sen} x| > \frac{1}{2}$ (b) $|x^2 - 4| > 2|x^2 - 1|$

7. Tente esboçar o gráfico de:
   (a) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ (c) $f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

8. Seja $n > 0$ um inteiro e $a, b, x \in \mathbb{R}$. Verifique que:
   (a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i\right)$
   (b) $x - a = (\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4})$
   (c) $(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) = 1$

9. Use o exercício 8 para determinar a expressão que deve ser colocada em (...) para que a igualdade seja verdadeira.
   (a) $x - 8 = (\sqrt[3]{x} - 2)(...)$
   (b) $x^2 + x = (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(...)$
   (c) $x^4 = (\sqrt[4]{x^4+1} - 1)(...)$