# Números Reais

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

# Corpos

DEFINIÇÃO Seja $K$ um conjunto munido de duas operações, denotadas por "$+$" e "$\cdot$". Diz-se que $(K, +, \cdot)$ é um *corpo* se satisfizer as seguintes condições:

# Corpos

DEFINIÇÃO Seja $K$ um conjunto munido de duas operações, denotadas por "$+$" e "$\cdot$". Diz-se que $(K, +, \cdot)$ é um *corpo* se satisfizer as seguintes condições:

**(A1)** $\forall x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$

**(A2)** $\forall x, y : x + y = y + x$

**(A3)** $\exists 0 \in K, \forall x : x + 0 = x$

**(A4)** $\forall x, \exists (-x) : x + (-x) = 0$

# Corpos

**(M1)** $\forall x, y, z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

**(M2)** $\forall x, y : x \cdot y = y \cdot x$

**(M3)** $\exists 1 \in K, 1 \neq 0, \forall x : x \cdot 1 = x$

**(M4)** $\forall x, \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$

# Corpos

**(M1)** $\forall x, y, z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

**(M2)** $\forall x, y : x \cdot y = y \cdot x$

**(M3)** $\exists 1 \in K, 1 \neq 0, \forall x : x \cdot 1 = x$

**(M4)** $\forall x, \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$

**(D)** $\forall x, y, z : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

# Propriedades da Adição e Multiplicação

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. As seguintes propriedades decorrem de (A1)-(A4):

1. o elemento neutro da adição é único;
2. dado $x \in K$, o simétrico de $x$ é único; além disso, $-(-x) = x$;
3. lei do cancelamento: $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$;

# Propriedades da Adição e Multiplicação

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. As seguintes propriedades decorrem de (M1)-(M4):

1. o elemento neutro da multiplicação é único;
2. dado $x \in K, x \neq 0$, o inverso multiplicativo de $x$ é único; além disso, $(x^{-1})^{-1} = x$;
3. lei do cancelamento:
   $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \neq 0 \Rightarrow x = y$;

# Propriedades da Adição e Multiplicação

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. Tem-se:

1. $\forall x : 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x, y : (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
3. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

# Relações de Ordem

DEFINIÇÃO Sejam $A$ um conjunto e $\leqslant \subset A \times A$ uma relação em $A$. Diz-se que $\leqslant$ é uma *relação de ordem parcial* se:

# Relações de Ordem

DEFINIÇÃO Sejam $A$ um conjunto e $\leqslant \subset A \times A$ uma relação em $A$. Diz-se que $\leqslant$ é uma *relação de ordem parcial* se:

**(O1)** $(\forall x \in A) x \leqslant x$ (i.e., $\leqslant$ é *reflexiva*);

# Relações de Ordem

DEFINIÇÃO Sejam $A$ um conjunto e $\leqslant \subset A \times A$ uma relação em $A$. Diz-se que $\leqslant$ é uma *relação de ordem parcial* se:

**(O1)** $(\forall x \in A) x \leqslant x$ (i.e., $\leqslant$ é *reflexiva*);

**(O2)** $(\forall x, y \in A)$ se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$ (i.e., $\leqslant$ é *anti-simétrica*);

# Relações de Ordem

DEFINIÇÃO Sejam $A$ um conjunto e $\leqslant \subset A \times A$ uma relação em $A$. Diz-se que $\leqslant$ é uma *relação de ordem parcial* se:

**(O1)** $(\forall x \in A) x \leqslant x$ (i.e., $\leqslant$ é *reflexiva*);

**(O2)** $(\forall x, y \in A)$ se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$ (i.e., $\leqslant$ é *anti-simétrica*);

**(O3)** $(\forall x, y, z \in A)$ se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, então $x \leqslant z$ (i.e., $\leqslant$ é *transitiva*).

# Relações de Ordem

Uma relação de ordem parcial diz-se *total* ou *linear* se também satisfizer:

**(O4)** $(\forall x, y \in A)\ x \leqslant y$ **ou** $y \leqslant x$**.**

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot)$ um corpo e $\leqslant$ uma relação de ordem total em $K$. Diz-se que $(K, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot)$ um corpo e $\leqslant$ uma relação de ordem total em $K$. Diz-se que $(K, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

**(OA)** $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot)$ um corpo e $\leqslant$ uma relação de ordem total em $K$. Diz-se que $(K, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

**(OA)** $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$

**(OM)** $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$

# Propriedades de Corpos Ordenados

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. Tem-se:

1. Regra de sinais:
   (a) $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
   (b) $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$
   (c) $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$
2. se $x \neq 0$, $x$ e $x^{-1}$ têm o mesmo sinal;
3. $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$
4. $0 > x > y \Rightarrow 0 > y^{-1} > x^{-1}$

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot)$ e $(F, +, \cdot)$ corpos. Diz-se que $\phi : K \rightarrow F$ é um homomorfismo de corpos se: (i) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, (ii) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ e (iii) $\phi(1) = 1$.

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot)$ e $(F, +, \cdot)$ corpos. Diz-se que $\phi : K \to F$ é um homomorfismo de corpos se: (i) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, (ii) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ e (iii) $\phi(1) = 1$.

Se $(K, +, \cdot, \leqslant)$ e $(F, +, \cdot, \leqslant)$ forem corpos ordenados, $\phi : K \to F$ diz-se um homomorfismo de corpos ordenados se for um homomorfismo de corpos e se preservar ordem, i.e. $x \leqslant y \Rightarrow \phi(x) \leqslant \phi(y)$.

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. Dados $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se $n \cdot x$ indutivamente por:

1. $1 \cdot x \doteq x$
2. $(n+1) \cdot x \doteq n \cdot x + x$

# Corpos Ordenados

DEFINIÇÃO Seja $(K,+,\cdot)$ um corpo. Dados $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se $n \cdot x$ indutivamente por:

1. $1 \cdot x \doteq x$
2. $(n+1) \cdot x \doteq n \cdot x + x$

PROPOSIÇÃO Seja $(K,+,\cdot)$ um corpo. Tem-se, $\forall m,n \in \mathbb{N}, \forall x,y \in K$:

1. $(m+n) \cdot x = m \cdot x + n \cdot x$
2. $n \cdot (x+y) = n \cdot x + n \cdot y$
3. $n \cdot (x \cdot y) = (n \cdot x) \cdot y = x \cdot (n \cdot y)$

# Corpos Ordenados

PROPOSIÇÃO Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

1. $n \cdot 0 = 0$
2. $n \cdot 1 > 0$

# Corpos Ordenados

PROPOSIÇÃO Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

1. $n \cdot 0 = 0$
2. $n \cdot 1 > 0$

PROPOSIÇÃO Sejam $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado e $\phi : \mathbb{Q} \to K$ dada por $(\forall m/n \in \mathbb{Q})\phi(m/n) \doteq (m \cdot 1)/(n \cdot 1)$. Então $\phi$ é um homomorfismo de corpos ordenados.

# Módulo

DEFINIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. Definimos $|\cdot| : K \to K$ por:

$$|x| \doteq \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

# Módulo

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. Tem-se, $\forall x, y \in K$:

1. $|x| = \max\{x, -x\}$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e, se $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
3. $||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$
4. dado $a \geqslant 0$, tem-se
   $|x - y| \leqslant a \Leftrightarrow y - a \leqslant x \leqslant y + a$

# Majorante, Supremo e Máximo

DEFINIÇÃO Sejam $X$ um conjunto munido de uma ordem parcial $\leqslant$, $A \subset X$ e $a \in X$.

# Majorante, Supremo e Máximo

DEFINIÇÃO  Sejam $X$ um conjunto munido de uma ordem parcial $\leqslant$, $A \subset X$ e $a \in X$.

1. $a$ diz-se um *majorante* ou *limitante superior* de $A$ se $(\forall x \in A) x \leqslant a$;

# Majorante, Supremo e Máximo

DEFINIÇÃO Sejam $X$ um conjunto munido de uma ordem parcial $\leqslant$, $A \subset X$ e $a \in X$.

1. $a$ diz-se um *majorante* ou *limitante superior* de $A$ se $(\forall x \in A) x \leqslant a$;
2. $a$ diz-se *supremo* de $A$ se for o menor majorante de $A$;

# Majorante, Supremo e Máximo

DEFINIÇÃO Sejam $X$ um conjunto munido de uma ordem parcial $\leqslant$, $A \subset X$ e $a \in X$.

1. $a$ diz-se um *majorante* ou *limitante superior* de $A$ se $(\forall x \in A) x \leqslant a$;
2. $a$ diz-se *supremo* de $A$ se for o menor majorante de $A$;
3. $a$ diz-se *máximo* de $A$ se for majorante de $A$ e se $a \in A$.

# Axioma do Supremo

DEFINIÇÃO Seja $X$ um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leqslant$. Diz-se que $(X, \leqslant)$ satisfaz o axioma do supremo se o seguinte axioma for satisfeito:

**(S)** Todo subconjunto não-vazio de $X$ limitado superiormente admite supremo.

# Axioma do Supremo

DEFINIÇÃO Seja $X$ um conjunto munido de uma relação de ordem parcial $\leqslant$. Diz-se que $(X, \leqslant)$ satisfaz o axioma do supremo se o seguinte axioma for satisfeito:

**(S)** Todo subconjunto não-vazio de $X$ limitado superiormente admite supremo.

DEFINIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. Diz-se que o mesmo é um corpo ordenado completo se o conjunto ordenado $(K, \leqslant)$ satisfizer o axioma (S).

# Axioma do Supremo

PROPOSIÇÃO Seja $X$ um conjunto munido de uma relação de ordem total $\leqslant$. São equivalentes:

1. Todo subconjunto não-vazio de $X$ limitado superiormente admite supremo.
2. Todo subconjunto não-vazio de $X$ limitado inferiormente admite ínfimo.

# Corpos Ordenados Completos

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. São equivalentes:

1. $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente
2. $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$
3. $\forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < a$

# Corpos Ordenados Completos

PROPOSIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$ um corpo ordenado. São equivalentes:

1. $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente
2. $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$
3. $\forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < a$

DEFINIÇÃO Seja $(K, +, \cdot, \leqslant)$. Se uma das condições equivalentes da proposição anterior for satisfeita, diz-se que $(K, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo arquimediano.

# Corpos Ordenados Completos

PROPOSIÇÃO Se $(K, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado completo, então é arquimediano.

# O Corpo dos Reais

Admitiremos que existe um corpo ordenado completo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$, e o chamaremos de corpo dos números reais.

# Intervalos Encaixados

TEOREMA Seja $I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ uma seqüência decrescente de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n]$. Então existe $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

TEOREMA

1. $\mathbb{R}$ não é enumerável.
2. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não-degenerado, então $A$ é não-enumerável.
3. Todo intervalo não-degenerado de $\mathbb{R}$ contém números racionais e irracionais.

# Referências Complementares


- W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGrawHill, New York, 1976.
- L. H. J. Monteiro, *Elementos de Álgebra*, Impa, Rio de Janeiro, 1969.