Elementos de Lógica Matemática

Uma Breve Iniciação

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Vamos aprender a falar aramaico?

$$\forall \epsilon > 0 \Big(\exists \delta > 0 \big(\forall x (0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2| < \epsilon) \big) \Big)$$

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação passível de assumir valor lógico *verdadeiro* ou *falso*;
- Toda proposição é verdadeira ou falsa (*princípio do terceiro excluído*);
- Uma proposição não pode ser verdadeira E falsa (*princípio da não-contradição*).

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$ (V);

Exemplos de Proposições

- $2 > 1$ (V);
- $5 = 1$ (F).

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- "$\neg$" ou "!" (negação);

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- "$\neg$" ou "!" (negação);
- "$\wedge$" (conectivo "e");

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- "$\neg$" ou "!" (negação);
- "$\wedge$" (conectivo "e");
- "$\vee$" (conectivo "ou");

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- "$\neg$" ou "!" (negação);
- "$\wedge$" (conectivo "e");
- "$\vee$" (conectivo "ou");
- "$\longrightarrow$" (conectivo "implica");

Conectivos Lógicos

Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos*:

- "$\neg$" ou "!" (negação);
- "$\wedge$" (conectivo "e");
- "$\vee$" (conectivo "ou");
- "$\longrightarrow$" (conectivo "implica");
- "$\longleftrightarrow$" (conectivo "se, e somente se").

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

Conectivos Lógicos

Sejam "P" e "Q" proposições.

- "$\neg P$" é verdadeira se "P" for falsa, e vice-versa;

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

- “$\neg P$” é verdadeira se “P” for falsa, e vice-versa;
- “P e Q” é verdadeira se ambas forem verdadeiras, e falsa caso contrário;

Conectivos Lógicos

Sejam “P” e “Q” proposições.

- “$\neg P$” é verdadeira se “P” for falsa, e vice-versa;
- “P e Q” é verdadeira se ambas forem verdadeiras, e falsa caso contrário;
- “P ou Q” é verdadeira se pelo menos uma delas for verdadeira, e falsa caso contrário.

Conectivos Lógicos

- “P$\longrightarrow$Q” é a mesma coisa que “($\neg$P) ou Q”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:

Conectivos Lógicos

- “P$\longrightarrow$Q” é a mesma coisa que “$($$\neg$P) ou Q”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
- “$2 > 1 \rightarrow 3 > 1$” (V);

Conectivos Lógicos

- “P$\rightarrow$Q” é a mesma coisa que “$(\neg$P) ou Q”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
- “$2 > 1 \rightarrow 3 > 1$” (V);
- “$2 > 1 \rightarrow 1 > 3$” (F);

Conectivos Lógicos

- “P→Q” é a mesma coisa que “$(\neg$P) ou Q”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
- “$2 > 1 \rightarrow 3 > 1$” (V);
- “$2 > 1 \rightarrow 1 > 3$” (F);
- “$5 = 2 \rightarrow 0 = 1$ (V);

Conectivos Lógicos

- “P$\rightarrow$Q” é a mesma coisa que “$(\neg$P) ou Q”; ou seja, é falsa se o lado esquerdo for verdadeiro e o lado direito falso, e verdadeira em qualquer outro caso; exemplos:
- “$2 > 1 \rightarrow 3 > 1$” (V);
- “$2 > 1 \rightarrow 1 > 3$” (F);
- “$5 = 2 \rightarrow 0 = 1$ (V);
- “$P \leftrightarrow$Q” é a mesma coisa que “P$\rightarrow$Q e Q$\rightarrow$P”, ou seja, é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas forem falsas.

Variáveis Livres

Seja P uma expressão na qual ocorre uma ou mais variáveis x, y, $z, \ldots$. Dizemos que uma dada ocorrência de uma variável x na expressão P é *livre* se x não está no escopo de algum quantificador $\forall$ (*quantificador universal*) ou $\exists$ (*quantificador existencial*).

Variáveis Livres

Exemplos:

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x\big(\exists y(y > x)\big)$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x\big(\exists y(y > x)\big)$ (nenhuma das variáveis é livre);

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x\big(\exists y(y > x)\big)$ (nenhuma das variáveis é livre);
- $\forall \epsilon\big(\exists \delta(0 < |x - a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon)\big)$

Variáveis Livres

Exemplos:

- $x > 0$ (x é variável livre);
- $\exists y(y > x)$ (x é livre, y é não-livre);
- $\forall x\big(\exists y(y > x)\big)$ (nenhuma das variáveis é livre);
- $\forall \epsilon\big(\exists \delta(0 < |x - a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \epsilon)\big)$ (x e a são livres, ϵ e δ são não-livres).

Sentenças abertas

Uma **expressão proposicional** ou **sentença aberta** é uma expressão P na qual ocorre uma ou mais variáveis x, y, $z, \ldots$, sendo pela menos uma ocorrência livre.

Sentenças abertas

Uma **expressão proposicional** ou **sentença aberta** é uma expressão P na qual ocorre uma ou mais variáveis x, y, $z, \ldots$, sendo pela menos uma ocorrência livre.
Usaremos daqui em diante a notação $P(x_1, \ldots, x_n)$ para designar uma sentença aberta na qual as variáveis livres são $x_1, \ldots, x_n$.

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P, de duas maneiras:

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P, de duas maneiras:

- atribui-se valores às variáveis livres de P, i.e. substitui-se as variáveis livres de P por elementos de um dado conjunto, o *universo* das variáveis;

Expressões Proposicionais e Proposições

Podemos construir *proposições* (i.e. sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada sentença aberta P, de duas maneiras:

- atribui-se valores às variáveis livres de P, i.e. substitui-se as variáveis livres de P por elementos de um dado conjunto, o *universo* das variáveis;
- quantifica-se as variáveis livres de P, usando-se os **quantificadores** $\forall$ ou $\exists$.

O Quantificador Existencial (“$\exists$”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\exists x \big(P(x)\big)$$

O Quantificador Existencial (“$\exists$”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\exists x \big(P(x)\big)$$

Por definição, a proposição acima é *verdadeira* se existir algum elemento do conjunto $\mathcal{U}$ tal que a substituição da variável livre x de $P(x)$ por este elemento resulte numa proposição verdadeira. Caso contrário, diz-se que $\exists x \big(P(x)\big)$ é uma proposição falsa.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x (x > 0)$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);
- $\exists x\big(\exists y(y + 1 < x)\big)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, x e y são variáveis reais (i.e. cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais).

- $\exists x(x > 0)$ (V);
- $\exists x(x^2 < 0)$ (F);
- $\exists x\big(\exists y(y + 1 < x)\big)$ (V).

O Quantificador Universal ("$\forall$")

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\forall x \big(P(x)\big)$$

O Quantificador Universal (“∀”)

Sejam x uma variável cujo universo é um dado conjunto $\mathcal{U}$, e $P(x)$ uma sentença aberta. Considere a proposição:

$$\forall x \big(P(x)\big)$$

Por definição, a proposição acima é *verdadeira* se a substituição da variável livre x de $P(x)$ por qualquer elemento do conjunto universo $\mathcal{U}$ resultar numa proposição verdadeira. Caso contrário, diz-se que $\forall x \big(P(x)\big)$ é uma proposição falsa.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x\big(\forall y(x > y)\big)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x\big(\forall y(x > y)\big)$ (F);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x\big(\forall y(x > y)\big)$ (F);
- $\forall x\big(\exists y(x > y)\big)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x (x > 0)$ (F);
- $\forall x (x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x \big(\forall y (x > y)\big)$ (F);
- $\forall x \big(\exists y (x > y)\big)$ (V);

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x\big(\forall y(x > y)\big)$ (F);
- $\forall x\big(\exists y(x > y)\big)$ (V);
- $\exists y\big(\forall x(x > y)\big)$

Exemplos

Nos exemplos a seguir, todas as variáveis são reais.

- $\forall x(x > 0)$ (F);
- $\forall x(x^2 \geqslant 0)$ (V);
- $\forall x\big(\forall y(x > y)\big)$ (F);
- $\forall x\big(\exists y(x > y)\big)$ (V);
- $\exists y\big(\forall x(x > y)\big)$ (F).

Implicações Lógicas

Sejam $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $Q(x_1, \ldots, x_n)$ sentenças abertas e $\mathcal{U}$ um conjunto.

Implicações Lógicas

Sejam $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $Q(x_1, \ldots, x_n)$ sentenças abertas e $\mathcal{U}$ um conjunto.

- Diz-se que P implica logicamente Q, no universo $\mathcal{U}$, e escreve-se $P \Rightarrow Q$, se a seguinte proposição for verdadeira, tomando-se $\mathcal{U}$ como universo das variáveis $x_1, \ldots, x_n$:

$$\forall x_1 \Big(\cdots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n)) \cdots \Big).$$

Implicações Lógicas

- Noutras palavras, isto significa que quaisquer valores de $x_1, \ldots, x_n$ no universo $\mathcal{U}$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Implicações Lógicas

- Noutras palavras, isto significa que quaisquer valores de $x_1, \ldots, x_n$ no universo $\mathcal{U}$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.
- Diz-se que P é logicamente equivalente a Q, e escreve-se $P \Leftrightarrow Q$, se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Exemplos

- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos do plano. Então:
  T retângulo $\Rightarrow$ o quadrado de um dos lados de T é a soma dos quadrados dos outros dois.

Exemplos

- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos do plano. Então:
  T retângulo $\Rightarrow$ o quadrado de um dos lados de T é a soma dos quadrados dos outros dois.
  Com efeito, no universo $\mathcal{U}$, a seguinte proposição é verdadeira:
  $\forall T(T$ retângulo $\rightarrow$ o quadrado de um dos lados de T é a soma dos quadrados dos outros dois).

Exemplos

- Em $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$, mas $x^2 \leqslant 4 \not\Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Exemplos

- Em $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$, mas $x^2 \leqslant 4 \nRightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.
- Um **teorema** é um enunciado da forma $H \Rightarrow T$, onde H e T são sentenças chamadas, respectivamente, de hipótese e tese.

Exercícios

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $\big(\neg(P \wedge Q)\big) \leftrightarrow \big((\neg P) \vee (\neg Q)\big)$

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $\big(\neg(P \wedge Q)\big) \leftrightarrow \big((\neg P) \vee (\neg Q)\big)$
- $\big(\neg(P \vee Q)\big) \leftrightarrow \big((\neg P) \wedge (\neg Q)\big)$

Como dizer “não”

Sejam, P, Q proposições. Verifique que são verdadeiras:

- $\big(\neg(P \wedge Q)\big) \leftrightarrow \big((\neg P) \vee (\neg Q)\big)$
- $\big(\neg(P \vee Q)\big) \leftrightarrow \big((\neg P) \wedge (\neg Q)\big)$
- $\big(P \to Q) \leftrightarrow \big((\neg Q) \to (\neg P)\big)$

Como dizer "não"

Sejam, $P(x), Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x. Verifique que são verdadeiras:

Como dizer “não”

Sejam, $P(x), Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x. Verifique que são verdadeiras:

- $\big(\neg(\forall x(P(x)))\big) \leftrightarrow \big(\exists x(\neg P(x))\big)$

Como dizer "não"

Sejam, $P(x), Q(x)$ sentenças abertas, $\mathcal{U}$ o universo de x. Verifique que são verdadeiras:

- $\big(\neg(\forall x(P(x)))\big) \leftrightarrow \big(\exists x(\neg P(x))\big)$
- $\big(\neg(\exists x(P(x)))\big) \leftrightarrow \big(\forall x(\neg P(x)))\big)$

Encontre a negação das seguintes proposições. A seguir, decida se são verdadeiras ou falsas (todas as variáveis são reais); justifique.

1. $\forall x\big(\exists y(y > x)\big)$.
2. $\forall \epsilon > 0\Big(\exists \delta > 0\big(\forall x(0 < |x| < \delta \to |5x| < \epsilon)\big)\Big)$.

Obs.: usa-se correntemente as abreviações:
"$\exists \delta > 0\big(P(\delta)\big)$" para "$\exists \delta\big(\delta > 0 \wedge P(\delta)\big)$";
"$\exists \delta \in A\big(P(\delta)\big)$" para "$\exists \delta\big(\delta \in A \wedge P(\delta)\big)$";
"$\forall \epsilon > 0\big(P(\epsilon)\big)$" para "$\forall \epsilon\big(\epsilon > 0 \to P(\epsilon)\big)$", etc.

Respostas:

1. Verdadeira; dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, tome $y = x + 2 > x$. Negação: $\exists x\big(\forall y(y \leqslant x)\big)$.
2. Verdadeira; dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \epsilon/5$. Negação: $\exists \epsilon > 0\Big(\forall \delta > 0\big(\exists x(0 < |x| < \delta \wedge |5x| \geqslant \epsilon)\big)\Big)$.

Encontre a negação das seguintes proposições. A seguir, decida se são verdadeiras ou falsas (todas as variáveis são reais); justifique.

1. $\forall \epsilon > 0 \Big(\exists \delta > 0 \big(\forall x (0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2| < \epsilon) \big) \Big)$.
2. $\forall \epsilon > 0 \Big(\exists \delta > 0 \big(\forall x (0 < |x| < \delta \rightarrow |x^2 - 1| < \epsilon) \big) \Big)$.

Respostas:

1. Verdadeira: dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Negação:
$\exists\epsilon > 0\Big(\forall\delta > 0\big(\exists x(0 < |x| < \delta \wedge |x^2| \geqslant \epsilon)\big)\Big)$.
2. Falsa (sugestão: verifique que a negação é verdadeira). Negação:
$\exists\epsilon > 0\Big(\forall\delta > 0\big(\exists x(0 < |x| < \delta \wedge |x^2 - 1| \geqslant \epsilon)\big)\Big)$.

Referências

- Jaime Ferreira de Campos, *Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos*, in *Lições de Análise Real*, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2001. http://www.math.ist.utl.pt/ jmatos/ltc/ltc.pdf
- Edgar de Alencar Filho, *Iniciação à Lógica Matemática*, Nobel, São Paulo, 1986.